Elena Vladimirovna Alves

Manuel Joaquim Alves

ANÁLISE MATEMÁTICA I

Instituto Superior de Ciências e Tecnologias de Moçambique

Departamento de Matemática e Informática

Elena Vladimirovna Molchanova Alves[1], **Manuel Joaquim Alves** [2]

Elementos de Análise Matemática I. – Maputo: Instituto Superior de Ciências e Tecnologias de Moçambique e Departamento de Matemática e Informática da Universidade Eduardo Mondlane, 2008-2023.— 62 p.

Referências bibliográficas: 8 títulos.

Revisão: Professor Doutor Andrey Shindyapin, Professor Catedrático do Departamento de Matemática e Informática da Universidade Eduardo Mondlane.
Prof. Doutor Sérgio Labovskiĭ, Professor Associado da Universidade Plehanov de Economia, Rússia.
Revisão linguística: Prof. Doutor L. San (Professor Auxiliar do Departamento de Matemática e Informática da Universidade Eduardo Mondlane).
Prof. Doutor R. Gwambe (Professor auxiliar do Departamento de Matemática e Informática da Universidade Eduardo Mondlane).

Este trabalho teve a ajuda da SIDA sob o subprograma Desenvolvimento das Capacidades em Matemática, Estatística e suas Aplicações (Subprograma 1.4.2)

[1]Professora Associada E.V.M. Alves é mestrada (Universidade Estatal de Saint-Petersburg) e doutorada (Universidade Estatal de Perm) em Matemática Aplicada. De 1996 à 2000 leccionou no Departamento Aeroespacial da Universidade Estatal Técnica de Perm. Leccionou na UEM e na Universidade Politécnica. Actualmente, desde 2023, lecciona no ISCTEM.

[2]Professor Catedrático M.J. Alves é mestrado (Universidade Estatal de Saint-Petersburg) e doutorado (Universidade Estatal de Perm) em Matemática Pura. Actualmente é professor no Departamento de Matemática e Informática da Universidade Eduardo Mondlane.

CONTEÚDO

Módulo ANÁLISE MATEMÁTICA I 6

Bem-vindo ao módulo ANÁLISE MATEMÁTICA I . . . 6
Objectivos do módulo . . . 6
Recomendações para estudo . . . 7
Bibliografia . . . 7

1 Unidade I. Limite de sucessão numérica 8

1.1 Introdução . . . 8
1.2 Objectivos . . . 8
1.3 Noção de sucessão numérica . . . 8
1.4 Limite de sucessão . . . 9
1.5 Limite de sucessões monótonas . . . 9
1.6 Exercícios . . . 10
1.7 Respostas . . . 10
1.8 Tarefas . . . 11
1.9 Auto-avaliação . . . 11
1.10 Chave de correcção . . . 11

2 Unidade II. Séries numéricas 14

2.1 Introdução . . . 14
2.2 Objectivos . . . 14
2.3 Noção de série numérica . . . 14
2.4 Teoremas de convergência para séries de sinal positivo . . . 15
2.5 Convergência de séries de sinal arbitrário . . . 16
2.6 Exercícios . . . 17
2.7 Respostas . . . 17
2.8 Tarefas . . . 18
2.9 Auto-avaliação . . . 18
2.10 Chave de correcção . . . 18

3 Unidade III. Limite de função 20

3.1 Introdução . . . 20
3.2 Objectivos . . . 20
3.3 Limite de função no ponto . . . 20
3.4 Limites laterais . . . 21
3.5 Propriedades aritméticas . . . 21
3.6 Exercícios . . . 22
3.7 Respostas . . . 23
3.8 Tarefas . . . 23
3.9 Auto-avaliação . . . 23
3.10 Chave de correcção . . . 24

4 Unidade IV. Limites notáveis 25

4.1 Introdução . . . 25
4.2 Objectivos . . . 25
4.3 Limites notáveis . . . 25
4.4 Exercícios . . . 26
4.5 Respostas . . . 26
4.6 Tarefas . . . 26
4.7 Auto-avaliação . . . 26
4.8 Chave de correcção . . . 27

5 Unidade V. Comparação de infinitésimos **28**

5.1 Introdução . . . 28
5.2 Objectivos . . . 28
5.3 Comparação de infinitésimos . . . 28
5.4 Aplicação de infinitésimos no cálculo de limites . . . 29
5.5 Exercícios . . . 29
5.6 Respostas . . . 30
5.7 Tarefas . . . 30
5.8 Auto-avaliação . . . 30
5.9 Chave de correcção . . . 31

6 Unidade VI. Continuidade de funções **33**

6.1 Introdução . . . 33
6.2 Objectivos . . . 33
6.3 Continuidade em termos de limite . . . 33
6.4 Classificação dos pontos de descontinuidade . . . 34
6.5 Exercícios . . . 35
6.6 Respostas . . . 36
6.7 Tarefas . . . 36
6.8 Auto-avaliação . . . 36
6.9 Chave de correcção . . . 37

7 Unidade VII. Derivada e diferencial de funções **39**

7.1 Introdução . . . 39
7.2 Objectivos . . . 39
7.3 Definição de derivada e diferencial . . . 39
7.4 Sentido geométrico e mecânico da derivada . . . 40
7.5 Regras de derivação e tabela de derivadas . . . 40
7.6 Exercícios . . . 42
7.7 Respostas . . . 42
7.8 Tarefas . . . 42
7.9 Auto-avaliação . . . 43
7.10 Chave de correcção . . . 43

8 Unidade VIII. Derivada da função composta **45**

8.1 Introdução . . . 45
8.2 Objectivos . . . 45
8.3 Regra de cadeia . . . 45
8.4 Derivada da função inversa . . . 45
8.5 Derivada de função dada implicitamente e na forma paramétrica . . . 46
8.6 Exercícios . . . 46
8.7 Respostas . . . 47
8.8 Tarefas . . . 47
8.9 Auto-avaliação . . . 47
8.10 Chave de correcção . . . 48

9 Unidade IX. Derivadas e diferenciais de ordem superior **49**

9.1 Introdução . . . 49
9.2 Objectivos . . . 49
9.3 Derivada e diferencial de ordem superior . . . 49
9.4 Sentido mecânico da derivada de segunda ordem . . . 50
9.5 Exercícios . . . 50
9.6 Respostas . . . 50
9.7 Tarefas . . . 50
9.8 Auto-avaliação . . . 51
9.9 Chave de correcção . . . 51

10 Unidade X. Teoremas sobre funções diferenciáveis e estudo geral de funções **53**

10.1 Introdução 53

10.2 Objectivos 53

10.3 Teoremas de Rolle, Cauchy e Lagrange 53

10.4 Monotonia versus sinal da derivada. Fórmula de Taylor e regra de L'Hospital 54

10.5 Extremos locais. Estudo geral duma função 56

10.6 Exercícios 58

10.7 Respostas 59

10.8 Tarefas 59

10.9 Auto-avaliação 60

10.10 Chave de correcção 61

Módulo ANÁLISE MATEMÁTICA I

Bem-vindo ao módulo ANÁLISE MATEMÁTICA I

"*...E nunca considere seu estudo como uma obrigação, mas sim como uma oportunidade invejável de aprender, sobre a influência libertadora da beleza no domínio do espírito, para seu prazer pessoal e para o proveito da comunidade à qual pertencerá o seu trabalho futuro.*" Albert Einstein

Nos dias atuais, a principal ferramenta utilizada para auxiliar o pensamento é o computador. Esse instrumento foi desenvolvido principalmente por engenheiros, físicos e matemáticos. Na primeira metade do século XX, a história das máquinas de computação envolveu mais estatísticos, físicos e engenheiros elétricos do que matemáticos. As máquinas de calcular de mesa e os sistemas de cartões perfurados eram indispensáveis para negócios, bancos e ciências sociais. A régua de calcular tornou-se o símbolo do engenheiro, e integradores de vários tipos eram usados por físicos, geodesistas e estatísticos. A situação mudou por volta de 1940 devido ao envolvimento de matemáticos no esforço de guerra. Embora a maior parte do esforço viesse de físicos e engenheiros, muitos matemáticos jovens desempenharam um papel importante no desenvolvimento do computador eletrônico digital automático. Três desses matemáticos notáveis são John Von Neumann (1903-1957), Norbert Wiener (1894-1964) e Alan Turing (1913-1954).

A sociedade atual atribui extrema importância ao computador. Profissionais como cientistas e engenheiros de computação, programadores, analistas de sistemas, entre outros, ocupam posições de destaque graças a essa ferramenta. Todos esses profissionais baseiam-se em disciplinas como lógica, algoritmos, estrutura de dados, matemática discreta, geometria, estatística, entre outras, que foram desenvolvidas ao longo dos séculos anteriores. Um profissional de computação que possui conhecimentos em matemática é capaz de resolver problemas complexos, apresentando soluções claras, organizadas, criativas e eficientes. As empresas estão cada vez mais em busca de profissionais com esse perfil, pois os desafios atuais são cada vez maiores e exigem conhecimentos mais sólidos. A geometria desempenha um papel fundamental no processo criativo desses profissionais, pois facilita a abstração do mundo real, permitindo a criação de novos modelos com facilidade e precisão.

No dinâmico universo da era atual, é imprescindível possuir conhecimentos básicos, especialmente para profissionais da área de computação, independentemente de serem mais técnicos ou voltados ao gerenciamento de projetos. Essa base de conhecimento é um diferencial para aqueles que buscam o sucesso e, ao mesmo tempo, é fundamental para a sobrevivência no mundo atual, onde a quantidade de informações é imensa e os avanços tecnológicos são extremamente rápidos. Podemos afirmar, portanto, que para compreender o mundo contemporâneo é necessário acompanhá-lo, e nesse sentido, a matemática aliada à computação se tornou uma linguagem indispensável.

O presente módulo Análise Matemática I é composto de dez unidades. Cada unidade tem uma componente teórica, reforçada de exemplos claros e ilustrativos, que permitem assimilar rapidamente os conceitos, definições e teoremas expostos. Seguem-se exercícios de aprofundamento e consolidação do material. No final de cada unidade temos exercícios e perguntas para autoavaliação.

O limite e continuidade são ideias chaves na Matemática. A expressão *contínuo* é comum mesmo na linguagem quotidiana. Usamos esta palavra, em particular, para caracterizar mudanças que são mais graduais do que espontâneas. O seu uso está mais relacionado com a ideia duma função contínua. Nas aplicações da Matemática nas ciências naturais e económicas, uma função representa habitualmente a variação de certo fenómeno ao longo do tempo. A continuidade da função irá então reflectir a continuidade do fenómeno no sentido dum desenvolvimento gradual sem variações repentinas. Podemos, por exemplo, modelar a temperatura do corpo humano como uma função do tempo. Aqui podemos assumir que ela varia continuamente e que não salta dum valor para outro sem passar através dos valores intermediários. Por outro lado, se considerarmos o preço do barril de petróleo num certo mercado, esta função do tempo será descontínua. Uma razão para isto é que o preço (medido em dólares ou numa outra moeda) deve sempre ser um número racional. Outra razão, mais interessante, para saltos ocasionais enormes no preço é a repentina chegada de notícias ou rumores que afectam significativamente a função da procura ou da oferta, por exemplo uma mudança brusca no governo dum país exportador de petróleo.

Um dos tópicos importante em muitas disciplinas científicas é o estudo de quanto rapidamente as quantidades variam ao longo do tempo. De modo a calcular a posição futura dum planeta, prognosticar o crescimento da população duma espécie biológica ou avaliar a procura futura duma mercadoria, precisamos de informação sobre as taxas de variação.

O conceito usado para descrever a taxa de variação duma função é a derivada, que é *conceito central* da Análise Matemática. Isaac Newton (1642–1727) e Gottfried Leibniz (1646–1716) são os fundadores do Cálculo Diferencial e Integral, que se tornou o fundamento para o desenvolvimento da ciência contemporânea.

Encontrar a melhor forma de realizar uma tarefa concreta envolve o que chamamos *problema de optimização*. Os exemplos abundam em quase todas as áreas da actividade humana: um gestor procura por aquelas combinações de factores (tais como capital e trabalho) que maximizam os lucros ou minimizam os custos, um médico pode querer saber quando é o melhor momento do dia para injectar uma droga de modo a evitar que a concentração no fluxo sanguíneo se torne perigosamente alta, um agricultor pode querer saber que quantidade de fertilizante, por metro quadrado, irá maximizar os lucros, uma companhia petrolífera pode desejar calcular a taxa óptima de extracção num dos seus poços e etc.

Ao estudarmos um problema de optimização deste tipo, usando métodos matemáticos, requer que se construa um modelo matemático para o problema. Isto não é, normalmente, assim tão fácil de fazer e somente em casos simples o modelo conduz ao problema de maximização ou minimização duma função a uma variável.

As aulas são teórico-práticas pelo que são compostas de: uma parte expositiva, onde são apresentados conceitos fundamentais das diferentes matérias do programa juntamente com a demonstração dos principais resultados, pretendendo-se assim que os alunos adquiram uma visão global dos temas abordados e suas interligações; uma componente prática, onde os alunos aplicarão os conhecimentos adquiridos melhorando a sua compreensão das matérias leccionadas.

Objectivos do módulo

No final da disciplina o estudante deve ser capaz de:

- Utilizar o pensamento lógico para organizar e relacionar informações recebidas sobre os problemas da vida;
- Quantificar a realidade mediante a realização de cálculos apropriados usando as derivadas;
- Actuar na resolução de problemas do quotidiano de acordo com a actividade matemática: estudo das alternativas possíveis, precisão e rigor no uso da linguagem, flexibilidade para mudar o ponto de vista quando necessário e perseverança na busca de soluções;
- Determinar limite de sucessão e função;
- Investigar a convergência de séries numéricas;
- Determinar derivada de funções nas suas diversas formas;
- Conhecer os teoremas fundamentais sobre funções diferenciáveis;
- Modelar e resolver problemas de optimização à uma variável;
- Investigar uma função e esboçar o seu gráfico.

Recomendações para estudo

O processo de ensino e aprendizagem centrado no estudante requer que você desenvolva algumas habilidades essenciais para conseguir um bom rendimento e sucesso. Essas habilidades e competências são a autodisciplina, responsabilidade, o gosto pela pesquisa e a motivação. De modo a tornar o estudo deste módulo mais frutífero e aprofundar os seus conhecimentos recomendamos:

1) Estabeleça um plano de estudo, determine os dias e horários para estudar e realizar as actividades;
2) Estabeleça um tempo mínimo de estudo, de acordo com o seu ritmo e suas necessidades;
3) Procure interagir com os colegas, participando nas discussões propostas, trocando informações, ideias, reflexões, descobertas e dúvidas;
4) Leia, com muita atenção, os parágrafos onde se explanam os conceitos teóricos;
5) Ao estudar os exemplos providos em cada unidade, pegue numa esferográfica e papel e repita todos os passos de resolução;
6) Ao deparar-se com algum conceito, definição, fórmula ou teorema estudados anteriormente, mas que esqueceu, tome nota e posteriormente procure revê-los;
7) A leitura de algumas páginas de livros recomendados deve ser feita de modo obrigatório e os exercícios devem ser resolvidos;
8) De tempos em tempos faça uma breve revisão dos temas abordados anteriormente;
9) Contacte o regente ou assistente do módulo sempre que precisar.

Bibliografia

[1] R. A. Adams, *Calculus: A Complete Course*, Fifth Edition, Addison Wesley Longman, Toronto, 2003.

[2] C. H. Edwards and D. E. Penney, *Calculus*, Sixth Edition, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 2002.

[3] M. J. Alves, *Elementos de Análise Matemática: Parte I*, DMI, Maputo, 2001.

[4] E. V. Alves e M. J. Alves, *Elementos de Análise Matemática: Parte II*, DMI, Maputo, 2004.

[5] B. P. Demidovitch, *Problemas e Exercícios de Análise Matemática*, Editora Mir, Moscovo, 1984.

[6] K. Sydsaeter e P. Hammond (com a colaboração de M. Alves e A. Shindiapin), *Matemática Essencial para Análise Económica: Parte I*, Texto Editores, Maputo, 2004.

[7] K. Sydsaeter e P. Hammond (com a colaboração de M. Alves e A. Shindiapin), *Matemática Essencial para Análise Económica: Parte II*, Texto Editores, Maputo, 2006.

[8] J. C. Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, F.C. Gulbenkian, 2008.

1 Unidade I. Limite de sucessão numérica

1.1 Introdução

A sucessão numérica é uma *função de argumento natural*. Interesse especial tem o cálculo do seu *limite*, isto é, o seu comportamento quando o seu argumento assume valores cada vez maiores.

1.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Definir sucessão numérica;

2) Definir limite de sucessão;

3) Conhecer as condições de convergência de sucessões monótonas.

1.3 Noção de sucessão numérica

Definição 1. *Se a cada número natural n se faz corresponder um certo número real x_n, então diremos que está definida a* **sucessão numérica** $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

A denotação usada é $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ou, caso não suscite dúvidas, x_n. O número x_n é o n−ésimo termo (ou elemento) da sucessão $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

As sucessões $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ e $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ chamaremos *soma, diferença, produto e quociente*, respectivamente, das sucessões $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ (para o quociente supõe-se que $y_n \neq 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$).

Definição 2. *Diremos que a sucessão $\{x_n\}$ é limitada se $\exists\, M > 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M$.*

Exemplo 1. *Mostre que a sucessão de termo geral $x_n = \dfrac{n}{3^n}$ é limitada.*

Resolução. Temos $3^n = (1+2)^n \geq 2n$, logo $\left|\dfrac{n}{3^n}\right| \leq \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

Definição 3. *Diremos que a sucessão x_n é decrescente (crescente) se $x_{n+1} \leq x_n$ $(x_{n+1} \geq x_n)$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.*

As sucessões decrescentes ou crescentes chamam-se sucessões *monótonas.*

Exemplo 2. *Dada a sucessão numérica de termo geral $x_n = \dfrac{n^2-1}{n^2}$ verifique se ela é crescente.*

Resolução. Uma sucessão numérica diz-se crescente se $\forall\, n \in \mathbb{N}$ temos $x_n \leq x_{n+1}$. Vamos verificar o cumprimento desta desigualdade:

$$x_n = \frac{n^2-1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = x_{n+1}.$$

Para se demonstrar que uma afirmação é correcta para qualquer número natural n, é suficiente mostrar que:

1) A afirmação é correcta para $n = 1$;

2) Caso o ponto anterior se cumpra, então supomos que a afirmação é correcta para $n = k$;

3) Finalmente mostramos que, com base na suposição 2), a afirmação é correcta para $n = k + 1$.

Este método de demonstração chama-se *método de indução matemática.*

Exemplo 3. *Prove que para qualquer natural n cumpre-se a igualdade* $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Resolução. Para $n = 1$ temos $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$, isto é, o ponto 1) do método de indução matemática cumpre-se. Suponhamos que para $n = k$ a igualdade é válida, isto é, $1 + 2 + \cdots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$. Sendo assim, mostremos que para $n = k + 1$ a igualdade cumpre-se, isto é,

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}?$$

Realmente,

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

1.4 Limite de sucessão

Definição 4. *Diremos que o número* a *é limite da sucessão* $\{x_n\}$ *se*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \ \forall\ n > N : |x_n - a| < \varepsilon.$$

A denotação usada é $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ou $\lim x_n = a$, ou $x_n \to a$.

Exemplo 4. *Utilizando a definição de limite mostre que*

$$\lim \frac{n}{n+1} = 1.$$

Resolução. Pegamos um $\varepsilon > 0$ qualquer e vamos ver o módulo da diferença entre o n–ésimo termo e a unidade, isto é,

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right|.$$

Assim, $|x_n - 1| = \left|-\dfrac{1}{n+1}\right| = \dfrac{1}{n+1}$. Logo, e de acordo com a definição, temos que determinar um número natural N tal, que $\forall\ n > N$ terá lugar a desigualdade $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$. Resolvendo esta desigualdade em ordem ao n temos $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Na qualidade de N podemos tomar a parte inteira de $\dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, isto é, $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right]$.

Do ponto de vista geométrico significa que em qualquer vizinhança de a e raio ε "caiem" todos os elementos da sucessão $\{x_n\}$, com excepção dum número finito.

Se uma sucessão tem limite finito, então diremos que ela é *convergente*. Se uma sucessão não tem limite, ou o seu limite é igual ao infinito, então diremos que ela é *divergente*.

Exemplo 5. *Seja* $x_n = \dfrac{2n}{n+1}$. *Na linguagem* $\epsilon - N$, *mostre que* $\lim x_n = 2$ *e preencha a tabela:*

ϵ	0.001	0.0001
N		

Resolução. Pegamos um $\varepsilon > 0$ qualquer e vejamos o módulo da diferença entre o n–ésimo termo e dois, isto é,

$$|x_n - 2| = \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|-\frac{2}{n+1}\right|.$$

Assim, $|x_n - 2| = \left|-\dfrac{2}{n+1}\right| = \dfrac{2}{n+1}$; de acordo com a definição temos que determinar um número natural N tal, que $\forall\ n > N$ terá lugar a desigualdade $\dfrac{2}{n+1} < \varepsilon$. Resolvendo esta desigualdade em ordem ao n temos $n > \dfrac{2}{\varepsilon} - 1$. Na qualidade de N podemos tomar a parte inteira de $\dfrac{2}{\varepsilon} - 1$, isto é, $N = \left[\dfrac{2}{\varepsilon} - 1\right]$.

Vamos, agora, completar a tabela:

ϵ	0.001	0.0001
N	1999	19999

Teorema 1. *Se a sucessão* $\{x_n\}$ *é convergente, então o seu limite é único.*

Teorema 2. *Se a sucessão* $\{x_n\}$ *é convergente, então ela é limitada.*

A afirmação contrária não é verdadeira: uma sucessão pode ser limitada, mas não ser convergente. Por exemplo, a sucessão de termo geral $(-1)^n$ é limitada, mas não converge.

1.5 Limite de sucessões monótonas

Nem toda a sucessão tem limite. Vamos formular o teorema de Weierstrass[3], sobre a convergência de sucessões monótonas.

Teorema 3. *Seja* $\{x_n\}$ *uma sucessão decrescente (crescente) e limitada. Então a sucessão* $\{x_n\}$ *é convergente.*

Exemplo 6. *Demonstre que a sucessão de termo geral* $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ *é convergente.*

[3] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) — matemático alemão

Resolução. Temos

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} > \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = 1.$$

Vemos que $x_{n+1} > x_n$, isto é, x_n é crescente.

Mostremos que x_n é limitada. Pelo binómio de Newton temos

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) <$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3.$$

Assim, $2 \le x_n < 3$. Ao mostrarmos que a sucessão x_n é limitada, exploramos o facto

$$1 - \frac{i}{n} < 1, \quad \forall\ 1 \le i \le n, \quad n! > 2^{n-1},\ n \ge 2.$$

Portanto, e pelo teorema de Weierstrass, a sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é convergente e o seu limite é igual a e. O número e chama-se *número de Napier*, é um número irracional e igual a $2.718281828459045\ldots$

1.6 Exercícios

1) Mostre que a sucessão $x_n = \dfrac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}}$, $n \in \mathbb{N}$ é limitada;

2) Seja $x_n = \dfrac{n^3}{n^3+1}$. Na linguagem $\epsilon - N$, mostre que $\lim x_n = 1$ e preencha a tabela:

ϵ	$1/28$	$1/27001$
N		

;

3) Aplicando a definição de limite, mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^4}{n^4-1} = 1$;

4) Aplicando a definição de limite, mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$;

5) Dada a sucessão de termo geral $\dfrac{2-n}{2+n}$ mostre, aplicando a definição de limite, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2-n}{2+n} = -1$.

6) Prove que para qualquer natural n é válida a igualdade $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$;

7) Prove que para qualquer natural n é válida a igualdade $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$;

8) Prove que é válida a desigualdade $(1+x)^n \ge 1 + nx \quad (n > 1,\ \ x > -1)$;

9) Prove que é válida a desigualdade $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \quad (n \ge 2)$;

10) Prove que para qualquer natural n é válida a desigualdade $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \quad (x_k \ge 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n)$.

1.7 Respostas

1) $\left|\dfrac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2+1}}\right| \le 11$;

2)

ϵ	$1/28$	$1/27001$
N	3	30

.

1.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 1.3, 1.4 e 1.5 desta unidade;

2) Do livro *Elementos de Análise Matemática-Parte I*, ler as páginas de 15 a 21 e de 29 a 47;

3) No capítulo 7, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte I*, ler as páginas de 280 a 282 e resolver, no parágrafo 7.10, os exercícios 1, 2 e 3;

4) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

5) Resolver os exercícios do parágrafo 1.6 desta unidade;

6) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 166, 167, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 175, 177, 178, 276, 285.

1.9 Auto-avaliação

1) Dê a definição de sucessão limitada e sucessão monótona;

2) Dê a definição de limite de sucessão;

3) Enuncie o teorema do limite para sucessões monótonas;

4) Mostre que a sucessão de termo geral $x_n = \dfrac{n}{a^n}$ $(a > 1\,,\ n \in \mathbb{N})$ é limitada;

5) Dada a sucessão numérica de termo geral $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2}$ verifique se ela é limitada;

6) Mostre, aplicando a definição de limite, que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3}{n^3 + 1} = 1$;

7) Seja $x_n = \dfrac{n^2}{n^2 + 1}$. Na linguagem $\epsilon - N$, mostre que $\lim x_n = 1$ e preencha a tabela:

ϵ	1/101	1/10001
N		

8) Utilizando a definição, mostre que $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2} = 5$;

9) Mostre que a sucessão x_n, onde $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, tem limite e calcule esse limite;

10) Usando o método de indução matemática prove a igualdade $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.10 Chave de correcção

1) Veja as definições dadas no parágrafo 1.3 desta unidade;

2) Veja a definição dada no parágrafo 1.4 desta unidade;

3) Veja o teorema enunciado no parágrafo 1.5 desta unidade;

4) Mostre que a sucessão de termo geral $x_n = \dfrac{n}{a^n}$ $(a > 1\,,\ n \in \mathbb{N})$ é limitada;

   Resolução. Façamos

$$a = 1 + a - 1 \Longrightarrow a^n = (1 + a - 1)^n > n(a - 1).$$

   Em conclusão:

$$0 < \frac{n}{a^n} < \frac{n}{n(a-1)} = \frac{1}{a-1}. \quad \blacksquare$$

5) Dada a sucessão numérica de termo geral $u_n = \dfrac{n^2-1}{n^2}$ verifique se ela é limitada;

Resolução. Para saber se a sucessão é limitada temos que verificar se

$$\exists\, m,\ M \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} : m \leq u_n \leq M.$$

Sabemos que

$$-1 < -\frac{1}{n^2} \leq 0 \Longrightarrow 0 < 1 - \frac{1}{n^2} \leq 1,$$

portanto $u_n = \dfrac{n^2-1}{n^2}$ é limitada. ■

6) Mostre, aplicando a definição de limite, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^3+1} = 1$;

Resolução. Pegamos um $\varepsilon > 0$ qualquer e vamos ver o módulo da diferença entre o n-ésimo termo e a unidade, isto é,

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n^3}{n^3+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n^3+1}\right|.$$

Assim, $|x_n - 1| = \left|-\dfrac{1}{n^3+1}\right| = \dfrac{1}{n^3+1}$ e, de acordo com a definição, temos que determinar um número natural N tal, que $\forall\, n > N$ terá lugar a desigualdade $\dfrac{1}{n^3+1} < \varepsilon$. Resolvendo esta desigualdade em relação à n temos $n > \sqrt[3]{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}$. Na qualidade de N podemos tomar a parte inteira de $\sqrt[3]{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}$, isto é, $N = \left[\sqrt[3]{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}\right]$. ■

7) Seja $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$. Na linguagem $\epsilon - N$, mostre que $\lim x_n = 1$ e preencha a tabela:

ϵ	1/101	1/10001
N		

Resolução. Pegamos um $\varepsilon > 0$ qualquer e vamos ver o módulo da diferença entre o n–ésimo termo e a unidade, isto é,

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n^2+1}\right|.$$

Assim, $|x_n - 1| = \left|-\dfrac{1}{n^2+1}\right| = \dfrac{1}{n^2+1}$ e, de acordo com a definição, temos que determinar um número natural N tal, que $\forall\, n > N$ terá lugar a desigualdade $\dfrac{1}{n^2+1} < \varepsilon$. Resolvendo esta desigualdade em ordem ao n temos $n > \sqrt[2]{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}$. Na qualidade de N podemos tomar a parte inteira de $\sqrt[2]{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}$, isto é, $N = \left[\sqrt[2]{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}\right]$.

Vamos, agora, completar a tabela:

ϵ	1/101	1/10001
N	10	100

■

8) Utilizando a definição, mostre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 3^n}{3^n-2} = 5$;

Resolução. Pela definição de limite significa que

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, N \in \mathbb{N} \ \ \forall\, n > N : \left|\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2} - 5\right| < \varepsilon.$$

Assim,

$$\left|\frac{5\cdot 3^n}{3^n-2} - 5\right| = \frac{10}{3^n-2} < \varepsilon.$$

Resolvendo esta inequação em ordem ao n temos

$$n > \log_3\left(\frac{10}{\varepsilon} + 2\right).$$

Na qualidade de N podemos tomar

$$N = \left[\log_3\left(\frac{10}{\varepsilon} + 2\right)\right]. \quad ■$$

9) Mostre que a sucessão x_n, onde $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, tem limite e calcule esse limite;

Resolução. Vamos mostrar que a sucessão $x_n = \sqrt{6 + x_n}$ é crescente e, para tal, faremos isto usando o método de indução matemática. Temos

$$x_2 = \sqrt{6 + x_1} = \sqrt{6 + 0} = \sqrt{6} > 0 = x_1 .$$

Suponhamos que $x_{k+1} > x_k$. Então $x_{k+2}^2 > x_{k+1}^2$ e tal como $x_{k+2} > 0$ e $x_{k+1} > 0$ a desigualdade $x_{k+2} > x_{k+1}$ é correcta.

Mostremos que x_n é limitada. É claro que para qualquer natural n temos $0 \le x_n$ e $x_n^2 < x_{n+1}^2 = 6 + x_n$, i.e. $x_n^2 - x_n - 6 < 0$ de onde tiramos que $x_n < 3$. Assim, $0 \le x_n < 3$ para qualquer n natural.

Sendo x_n uma sucessão crescente e limitada, então ela é convergente. Suponhamos que $\lim x_n = c$. Fazendo a passagem do limite na igualdade $x_{n+1}^2 = 6 + x_n$ e tendo em conta, que $\lim x_{n+1} = c^2$ obtemos $c^2 = 6 + c$, daí que $c = 3$ (porque $x_n \ge 0$). ■

10) Usando o método de indução matemática prove a igualdade $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

Resolução. Para $n = 1$ temos $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = \dfrac{2 \cdot 3}{6} = 1$. Suponhamos que para $n = k$ a igualdade é válida, i.e.

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Vamos mostrar que para $n = k + 1$ a igualdade cumpre-se, isto é,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}?$$

Com efeito:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \quad ■$$

2 Unidade II. Séries numéricas

2.1 Introdução

As séries numéricas possuem amplo uso na investigação teórica da análise matemática e têm diferentes aplicações.

2.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Definir série numérica;

2) Calcular soma de séries;

3) Investigar a convergência de séries numéricas.

2.3 Noção de série numérica

Vejamos a sucessão de termo geral u_n e, formalmente, construímos a partir dos seus termos uma soma infinita

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{1}$$

Definição 5. *A soma* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *chamaremos* **série numérica** *de termo geral* u_n.

Definição 6. *A soma dos primeiros* n *termos, isto é,*

$$S_n \stackrel{\text{def}}{=} u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k,$$

chamaremos $n-$**ésima soma parcial** *da série (1).*

Diremos que a série (1) é *convergente* (*divergente*) se converge (diverge) a sucessão S_n de suas somas parciais. Ao limite de S_n chamaremos *soma* S da série (1).

Exemplo 7. *Utilizando a definição mostre que a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

é convergente.

Resolução. Compomos a soma parcial

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}};$$

vemos que S_n é a soma de n termos duma progressão geométrica, cujo primeiro termo é 1 e a razão igual a $\frac{1}{2}$. Em conclusão: $S_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, que tende para $S = 2$.

Exemplo 8. *Dada a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

mostre, utilizando a definição, que ela é convergente.

Resolução. Por definição, afirmar que uma série é convergente significa que converge a sucessão de suas somas parciais. Vejamos a soma parcial

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Decompomos a fracção $\frac{1}{k(k+1)}$ em fracções simples: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Voltando à soma parcial S_n temos:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

A sucessão de termo geral $1 - \frac{1}{n+1}$ converge para 1, portanto a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente.

A determinação da n-ésima soma parcial e seu limite, para qualquer série, em muitos casos não é tarefa fácil. Por isso, para esclarecer a convergência da série estabelecem-se *critérios de convergência* especiais. O primeiro deles é resumido no teorema que segue.

Teorema 4. *(Condição necessária de convergência)*

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge, então* $\lim u_n = 0$.

Este teorema dá a condição necessária, mas não é suficiente: da condição que $\lim u_n = 0$ não segue que a série converge. Isto significa que existem séries divergentes tais que $\lim u_n = 0$. Na qualidade de exemplo, temos a série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, cujo termo geral $\frac{1}{n}$ tende para zero, mas a série diverge.

Exemplo 9. *Investigue a convergência da série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n+5}.$$

Resolução. A série dada diverge, pois $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n+5} = 3 \neq 0$.

2.4 Teoremas de convergência para séries de sinal positivo

O teorema sobre a condição necessária de convergência não dá a possibilidade de saber se uma série é convergente ou não. A convergência e divergência de séries, em muitos casos, pode-se estabelecer com ajuda de *critérios suficientes*.

A convergência ou divergência de séries de sinal positivo estabelece-se frequentemente por meio da sua comparação com outra série a qual é conhecido se converge ou diverge.

Teorema 5. *(Primeiro teorema de comparação) Sejam* u_n *e* v_n *duas sucessões numéricas e suponhamos que, para* $n > N$ *, se cumpre a desigualdade* $0 \le u_n \le v_n$ *. Então:*

1) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *converge implica que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *também converge;*

2) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *diverge implica que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *também diverge.*

Sejam u_n e v_n duas sucessões numéricas. Diremos que u_n é *equivalente* a v_n (usa-se a denotação $u_n \sim v_n$), quando n tende para infinito, se

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Teorema 6. *(Segundo teorema de comparação)*

Suponhamos que $u_n \sim v_n$ *. Então as séries* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *convergem ou divergem simultaneamente.*

Exemplo 10. *Investigue a convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

Resolução. A condição necessária cumpre-se, pois $\lim \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2 = 0$. Temos $\frac{1+n^2}{1+n^3} \sim \frac{1}{n}$, consequentemente $\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2 \sim \frac{1}{n^2}$, $n \to \infty$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, então pelo segundo teorema de comparação a série inicial converge.

De modo diferente do teorema de comparação, onde tudo depende da escolha de séries conhecidas convergentes ou divergentes, o teorema de d'Alembert[4] permite frequentemente resolver a questão de convergência da série fazendo para tal algumas operações sobre a série.

Teorema 7. *(de Alembert)*

Suponhamos que para o termo geral u_n *da série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n > 0\ (n = 1, 2, \ldots)$ *se cumpre a igualdade*

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda.$$

Então:

1) Se $\lambda < 1$ *a série converge;*

2) Se $\lambda > 1$ *a série diverge;*

3) Se $\lambda = 1$ *nada se pode dizer sobre a convergência da série.*

Exemplo 11. *Investigue a convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$.

[4] Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) — matemático francês

Resolução. A condição necessária de convergência cumpre-se, porque o termo geral da série tende para zero. Na investigação da convergência vamos usar o critério de d'Alembert. Assim:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot n!} = \lim \frac{2^{n+1} \cdot (n+1) n! n^n}{2^n \cdot n!(n+1)^{n+1}} = \lim \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= 2 \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2 \lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = 2 \cdot e^{\lim(-\frac{n}{n+1})} = 2 \cdot e^{-1} = \frac{2}{e} < 1,$$

portanto, a série converge.

Exemplo 12. *Investigue a convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$.

Resolução. A condição necessária de convergência cumpre-se, porque o termo geral da série tende para zero. Na investigação da convergência vamos usar, como no exemplo anterior, o teorema de d'Alembert. Assim:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim \frac{(2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} = \lim \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1,$$

portanto a série converge.

As vezes é cómodo usar o teorema radical de Cauchy na investigação da convergência de séries positivas. Este teorema assemelha-se ao teorema de Alembert.

Teorema 8. *(radical de Cauchy)*

Suponhamos que para o termo geral u_n *da série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \geq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *se cumpre a igualdade*

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lambda.$$

Então:

1) Se $\lambda < 1$ *a série converge;*

2) Se $\lambda > 1$ *a série diverge;*

3) Se $\lambda = 1$ *nada se pode dizer sobre a convergência da série.*

Exemplo 13. *Investigue a convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Resolução. É evidente que o termo geral tende para zero. Aplicando o teorema radical de Cauchy temos:

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

A série converge.

Exemplo 14. *Investigue a convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$.

Resolução. É evidente que o termo geral tende para zero. Aplicando o teorema radical de Cauchy temos:

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n^3}(\sqrt{2}+1)}{3} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1.$$

A série converge.

2.5 Convergência de séries de sinal arbitrário

Vamos considerar uma importante classe de séries chamadas alternadas.

Definição 7. *Chamaremos* **série alternada** *a série do tipo* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$, *onde* $u_n > 0$ *para todo* n.

Teorema 9. *(de Leibniz)*

Suponhamos que $u_n \geq 0$ *(* $n = 1, 2, \ldots$ *) e além disso se cumprem as condições:*

1) u_n *é decrescente, isto é,* $u_{n+1} \leq u_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

2) $\lim u_n = 0$.

Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ *converge.*

Exemplo 15. *Investigue a convergência da série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Resolução. A série é alternada, e $\frac{1}{n}$ é decrescente e tende para zero. Logo, pelo teorema de Leibniz, esta série converge.

Definição 8. *Uma série numérica de termos de sinal arbitrário* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge de modo* **absoluto** *se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *converge.*

Definição 9. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge de modo* **condicional** *se ela converge, mas a série* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *diverge.*

Exemplo 16. *Investigue a convergência absoluta e convergência condicional da série* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

Resolução. Por definição a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ converge de modo absoluto se converge a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Sabemos que esta última série converge se $p > 1$.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ converge condicionalmente se ela converge, mas não converge de modo absoluto. O termo $u_n = \frac{1}{n^p}$ é decrescente e tende para zero se $p > 0$ e, consequentemente, pelo teorema de Leibniz ela converge para valores de $p > 0$. Em conclusão: a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ converge condicionalmente se $0 < p \leq 1$ e converge de modo absoluto se $p > 1$.

2.6 Exercícios

1) Investigue a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n-1}$;

2) Determine a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$;

3) Investigue a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}, \quad |a_n| < 10$;

4) Investigue a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$;

5) Investigue a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$;

6) Investigue a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$;

7) Investigue a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$;

8) Investigue a convergência condicional e absoluta da série $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right)$.

2.7 Respostas

1) Diverge;

2) $1 - \sqrt{2}$;

3) Converge;

4) Converge;

5) Converge;

6) Diverge;

7) Diverge;

8) Para $p > 1$ converge de modo absoluto, para $1/2 < p \leq 1$ converge condicionalmente.

2.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 2.3, 2.4 e 2.5 desta unidade;

2) Do livro *Elementos de Análise Matemática-Parte II*, ler as páginas de 157 a 186;

3) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

4) Resolver os exercícios do parágrafo 2.6 desta unidade;

5) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 2401, 2403, 2405, 2407, 2409, 2410, 2411, 2413, 2416, 2417, 2418, 2421, 2422, 2423, 2424, 2426, 2427, 2429, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2437, 2438, 2439, 2450, 2452, 2451, 2453, 2458, 2459, 2464, 2470, 2472, 2473.

2.9 Auto-avaliação

1) Dê a definição de série numérica;

2) Enuncie a condição necessária de convergência duma série;

3) Enuncie o primeiro teorema de comparação;

4) Dê a definição de convergência condicional;

5) Investigue a convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$;

6) Investigue a convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n^4+8}$;

7) Investigue a convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$;

8) Investigue a convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}$;

9) Investigue a convergência absoluta e condicional da série numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+2}}$;

10) Investigue a convergência absoluta e condicional da série numérica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n+2}$.

2.10 Chave de correcção

1) Veja a definição dada no parágrafo 2.3 desta unidade;

2) Veja o teorema enunciado no parágrafo 2.3 desta unidade;

3) Veja o teorema enunciado no parágrafo 2.4 desta unidade;

4) Veja a definição dada no parágrafo 2.5 desta unidade;

5) Investigue a convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$;

   Resolução. O termo geral da série é $u_n = \frac{n}{2n+1}$ que converge para $\frac{1}{2} \neq 0$. Não se cumpre a condição necessária, logo a série dada diverge. ∎

6) Investigue a convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4}{n^4+8}$;

   Resolução. Usando equivalência do termo geral $\frac{n^2+4}{n^4+8} \sim \frac{1}{n^2}$ concluímos que a série dada converge, pois a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. ∎

7) Investigue a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$;

Resolução. A condição necessária de convergência cumpre-se. Aplicando o teorema de d'Alembert:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n \cdot 2^{n+1}} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

concluímos que a série converge. ■

8) Investigue a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}$;

Resolução. O termo geral da série é

$$u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}.$$

Aplicando o teorema radical de Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}} = \frac{1}{4} < 1,$$

concluímos que a série dada é convergente. ■

9) Investigue a convergência absoluta e condicional da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+2}}$;

Resolução. Vejamos, primeiro, a convergência absoluta. Temos que $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ diverge, pois comporta-se como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Logo, a série inicialmente dada não converge de modo absoluto. Investiguemos, agora, a convergência. A série é alternada, e $\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ é decrescente e tende para zero. Logo, pelo Teorema de Leibniz, esta série converge. Em conclusão: a série dada converge condicionalmente. ■

10) Investigue a convergência absoluta e condicional da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n+2}$.

Resolução. Vejamos, primeiro, a convergência absoluta. Temos que $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{3n+2}\right| = \frac{1}{3n+2}$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$ diverge, pois comporta-se como a série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Logo, a série inicialmente dada não converge de modo absoluto.

Investiguemos, agora, a convergência. A série é alternada, e $\frac{1}{3n+2}$ é decrescente e tende para zero. Logo, pelo critério de Leibniz, esta série converge. Em conclusão: a série dada converge condicionalmente. ■

3 Unidade III. Limite de função

3.1 Introdução

Nesta unidade vamos introduzir a noção de limite, que é um dos tópicos principais da Análise Matemática.

3.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Definir limite de função;

2) Aplicar as propriedades aritméticas com limites;

3) Calcular limites.

3.3 Limite de função no ponto

Começamos por introduzir algumas definições preliminares.

Definição 10. *Chamaremos* **vizinhança** *do ponto* x_0 *com raio* ε *, ao conjunto de pontos que satisfazem a dupla desigualdade:* $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ *ou* $|x - x_0| < \varepsilon$ *. Denota-se*[5] $U(x_0; \varepsilon)$ *.*

Definição 11. *Chamaremos* vizinhança reduzida *do ponto* x_0 *à vizinhança de* x_0 *menos o ponto* x_0 *. Denota-se* $\dot{U}(x_0; \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} U(x_0; \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ *.*

Vamos considerar que a função $y = f(x)$ está definida numa certa vizinhança dum ponto a, com excepção talvez do próprio ponto a.

Definição 12. *Segundo Heine*[6]*, diremos que o número* b *é* **limite** *da função* $f(x)$ *quando* x *tende para* a *se para qualquer sucessão de termo geral* x_n *convergente para* a *,* $x_n \neq a$ *, a sucessão* $f(x_n)$ *tende para* b *.*

Definição 13. *Na linguagem de vizinhança ou Cauchy,* $f(x)$ *tende para* b *quando* x *tende para* a *se qualquer que seja a vizinhança do ponto* a *com raio* δ *, existe uma vizinhança do ponto* b *com raio* ε *tal que qualquer que seja* x *pertencente à vizinhança reduzida do ponto* a *temos que* $f(x)$ *pertence à vizinhança do ponto* b *.*

A denotação usada é: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Teorema 10. *As definições de limite duma função segundo Heine e Cauchy são equivalentes.*

Exemplo 17. *Prove que* $\lim\limits_{x \to 3}(2x - 1) = 5$ *.*

Resolução. Pegamos um $\varepsilon > 0$ qualquer e determinamos $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para todos x que satisfazem a desigualdade $0 < |x - 3| < \delta$ cumpre-se a desigualdade $|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$, isto é, $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pegando $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ vemos que para todo x que satisfaz a desigualdade $0 < |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$, cumpre-se a desigualdade $|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$. Logo, $\lim\limits_{x \to 3}(2x - 1) = 5$.

Exemplo 18. *Aplicando a definição de limite de função segundo Cauchy mostre que* $\lim\limits_{x \to 4} x^2 = 16$ *.*

Resolução. Seja ε um número real positivo qualquer. Então,

$$|x^2 - 16| = |(x - 4)^2 + 8(x - 4)| \leq |x - 4|^2 + 4|x - 4| < \varepsilon.$$

Fazendo $t = |x - 4| > 0$ temos:

$$t^2 + 8t - \varepsilon < 0 \Longrightarrow (t + 4 + \sqrt{16 + \varepsilon})(t + 4 - \sqrt{16 + \varepsilon}) < 0.$$

Resolvendo esta desigualdade obtemos

$$0 < t < \sqrt{16 + \varepsilon} - 4, \text{ isto é, } \quad 0 < |x - 4| < \sqrt{16 + \varepsilon} - 4 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{16 + \varepsilon} + 4} = \delta(\varepsilon).$$

[5] Usa-se a letra maiúscula U, da inicial Umgebung que em alemão significa vizinhança.

[6] Heinrich Eduard Heine (1821–1881) — matemático alemão

3.4 Limites laterais

Na definição de limite de função $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ consideramos que x tende para a de qualquer modo: sendo menor que a (a esquerda de a), sendo maior que a (a direita de a) ou oscilando próximo de a. Existem casos quando o modo de aproximação do argumento x para a tem influência substancial no valor do limite. Por isso, vamos definir a noção de limite lateral.

Definição 14. *Diremos que o número b é* **limite à esquerda do ponto** a *da função* $f(x)$ *se:*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall\ x \neq a, \quad a - \delta < x < a \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

A denotação usada é: $b = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a^-)$.

Definição 15. *Diremos que o número b é* **limite à direita do ponto** a *da função* $f(x)$ *se:*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall\ x \neq a, \quad a < x < a + \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

A denotação usada é: $b = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a^+)$.

Os limites à esquerda ou à direita são comumente chamados *limites laterais*. Se uma função possui limite quando $x \to a$, então os limites laterais coincidem.

Exemplo 19. *Dada a função*

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & , \ \textit{se} \ \ 0 \leq x < 1, \\ \\ 4x - 2 & , \ \textit{se} \ \ x \geq 1, \end{cases}$$

calcule os limites laterais no ponto $x = 1$.

Resolução. Temos: $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (3x^2 + 1) = 4$, $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (4x - 2) = 2$.

Exemplo 20. *Dada a função* $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$, *calcule os limites laterais no ponto* $x = 1$.

Resolução. Temos: $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{|x-1|}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x-1} = 1$, $\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{|x-1|}{x-1} = -\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x-1} = -1$.

3.5 Propriedades aritméticas

Vejamos alguns teoremas que facilitam o cálculo de limite de funções.

Teorema 11. *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções definidas numa certa vizinhança do ponto a, com excepção talvez do próprio ponto a. Suponhamos que existem os limites $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$. Então:*

1) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, *se* $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.

Exemplo 21. *Calcule* $\lim\limits_{x \to 1} (3x^2 - 2x + 7)$.

Resolução. Aplicando o teorema anterior, calculamos directamente:

$$\lim_{x \to 1} (3x^2 - 2x + 7) = \lim_{x \to 1} 3x^2 - \lim_{x \to 1} 2x + \lim_{x \to 1} 7 = 3 \cdot 1 - 2 + 7 = 8.$$

Exemplo 22. *Calcule* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

Resolução. Aplicando o teorema anterior, calculamos directamente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 1)}{\lim\limits_{x \to 0} (2x^2 - x - 1)} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Na realidade, já que $x \to 0$, o numerador comporta-se como -1 e o denominador comporta-se também como -1.

Exemplo 23. *Calcule* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Resolução. A base e o expoente tendem para 1, quando x tende para o infinito, portanto o limite é igual à 1.

Exemplo 24. *Calcule* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Resolução. Aqui já não é possível aplicar o teorema sobre o limite do quociente, pois o denominador tende para zero, quando $x\to 2$. Também o limite do numerador tende para zero. Nestes casos dizemos que temos uma *indeterminação* do tipo $\dfrac{0}{0}$. Para o cálculo deste limite vamos factorizar o numerador e denominador, após o qual faremos a devida simplificação:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=-9.$$

Exemplo 25. *Calcule* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$.

Resolução. Aqui também não é possível aplicar o teorema sobre o limite do quociente, pois o numerador e denominador tendem para infinito, quando $x\to\infty$. Nestes casos dizemos que temos uma *indeterminação* do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para o cálculo deste limite vamos evidenciar no numerador e denominador a expressão de maior grau. Assim,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{4x^2}=\frac{1}{2}.$$

Nem toda a função, mesmo limitada, possui limite. Por exemplo, a função $y=\sin x$ não tem limite quando $x\to\infty$. Em muitas questões da análise matemática é suficiente somente estarmos convencidos da existência de limite. Nesses casos usamos teoremas de existência do limite, como o que segue.

Teorema 12. *Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ três funções definidas numa certa vizinhança do ponto a, com excepção talvez do próprio ponto a. Suponhamos também que nessa vizinhança tem lugar a dupla desigualdade:*

$$f(x)\le g(x)\le h(x).$$

Se $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=b$, *então* $\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$.

3.6 Exercícios

1) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

2) Calcule $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-6x+4}{x^2-1}$;

3) Calcule $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$;

4) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$;

5) Estude o comportamento das raízes x_1 e x_2 da equação quadrática $ax^2+bx+c=0$, se o coeficiente a tende para zero e os coeficientes b e c mantêm-se constantes, sendo $b\neq 0$;

6) Calcule as constantes a e b a partir da condição
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0;$$

7) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$;

8) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$;

9) Calcule $\lim\limits_{x\to 1^-}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$;

10) Calcule $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

3.7 Respostas

1) $\frac{1}{2}$;

2) -1 ;

3) $\frac{1}{4}$;

4) $\frac{1}{4}$;

5) $-\frac{c}{b}\,,\ \infty$;

6) $a = 1\,,\ b = -1$;

7) $+\infty$;

8) $\frac{1}{2}$;

9) $\frac{\pi}{2}$;

10) 1 .

3.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 3.3, 3.4 e 3.5 desta unidade;

2) Do livro *Elementos de Análise Matemática-Parte I*, ler as páginas de 71 a 84;

3) No capítulo 7, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte I*, ler as páginas de 267 a 272, 274 a 276 e resolver, no parágrafo 7.8, os exercícios 1, 2, 3, 4, 5 e 6;

4) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

5) Resolver os exercícios do parágrafo 3.6 desta unidade;

6) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 181, 182, 183, 185, 190, 191, 192, 195, 197, 199, 200, 201, 203, 204, 207, 209, 210, 213, 215, 264, 266, 267, 268, 269.

3.9 Auto-avaliação

1) Dê a definição de vizinhança;

2) Dê a definição de limite segundo Cauchy;

3) Dê a definição de limite lateral;

4) Enuncie as propriedades aritméticas com limites;

5) Usando a linguagem "$\varepsilon - \delta$" mostre que $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$;

6) Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$;

7) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$;

8) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

9) Calcule $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$;

10) Calcule $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$.

3.10 Chave de correcção

1) Veja a definição dada no parágrafo 3.3 desta unidade;

2) Veja a definição dada no parágrafo 3.3 desta unidade;

3) Veja a definição dada no parágrafo 3.4 desta unidade;

4) Veja o teorema enunciado no parágrafo 3.5 desta unidade;

5) Usando a linguagem "$\varepsilon - \delta$" mostre que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$;

Resolução. Seja ε um número real positivo qualquer. Então,

$$|x^2 - 4| = |(x-2)^2 + 4(x-2)| \le |x-2|^2 + 4|x-2| < \varepsilon.$$

Fazendo $t = |x-2| > 0$ temos:

$$t^2 + 4t - \varepsilon < 0 \Longrightarrow (t + 2 + \sqrt{4+\varepsilon})(t + 2 - \sqrt{4+\varepsilon}) < 0.$$

Resolvendo esta desigualdade obtemos

$$0 < t < \sqrt{4+\varepsilon} - 2, \text{ i.e. } \quad 0 < |x-2| < \sqrt{4+\varepsilon} - 2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon}+2} = \delta(\varepsilon). \quad \blacksquare$$

6) Calcule $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

Resolução. Colocando directamente o valor de $x = 1$ na expressão obtemos uma indeterminação do tipo $0/0$. Significa que o valor $x = 1$ é raíz do numerador e denominador. Factorizando o numerador e denominador temos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}. \quad \blacksquare$$

7) Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2+x^5}$;

Resolução. Desenvolvendo a expressão $(1+x)^5$ segundo o binómio de Newton temos:

$$(1+x)^5 = 1 + \binom{5}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^3 + \binom{5}{4}x^4 + x^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2+x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 - 1 - 5x}{x^2+x^5} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5}{x^2+x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(10 + 10x + 5x^2 + x^3)}{x^2(1+x^3)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{10 + 10x + 5x^2 + x^3}{1+x^3} = 10. \quad \blacksquare$$

8) Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

Resolução. Temos que

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \sqrt{x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}\right)}.$$

Assim,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x+1}} = 1. \quad \blacksquare$$

9) Calcule $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

Resolução. Vamos primeiro fazer algumas transformações:

$$\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{(2x-8)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}.$$

Calculando agora o limite obtemos:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3} = \frac{4}{3}. \quad \blacksquare$$

10) Calcule $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

Resolução. Temos uma indeterminação do tipo $0/0$. Multiplicando o numerador e denominador pela expressão $\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}$ teremos:

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})}{(x^2-9)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 3} \frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = -\frac{1}{16}. \quad \blacksquare$$

4 Unidade IV. Limites notáveis

4.1 Introdução

No cálculo de limites de expressões contendo funções trigonométricas, exponenciais ou logarítmicas, frequentemente usamos os limites notáveis, que iremos abordar nesta unidade.

4.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Enunciar os principais limites notáveis;

2) Aplicar os limites notáveis no cálculo de limites.

4.3 Limites notáveis

Proposição 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Exemplo 26. *Calcule*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}.$$

Resolução. Fazendo $t=5x$ temos que $x=\frac{t}{5}$ e $t\to 0$. Assim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{5\sin t}{t}=5\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=5,$$

pois $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ é um limite notável.

Nas aplicações da análise matemática, um grande papel joga a função exponencial de base e.

Proposição 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Exemplo 27. *Calcule*

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x},\quad a>0;$$

Resolução. Fazendo $a^x=e^{x\ln a}$ temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}=\ln a,$$

pois $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}=1.$

Proposição 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Exemplo 28. *Calcule*

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a};$$

Resolução. Fazendo a substituição $x-a=t$ temos

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+a)-\ln a}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+\frac{t}{a})}{t}=\frac{1}{a}\lim_{\theta\to 0}\frac{\ln(1+\theta)}{\theta}=\frac{1}{a}.$$

Aqui fizemos a substituição $\frac{t}{a}=\theta\to 0$.

4.4 Exercícios

1) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$;

2) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$;

3) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$;

4) Calcule $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$;

5) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$;

6) Calcule $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a}, \quad a > 0$;

4.5 Respostas

1) 1;

2) 2;

3) $\dfrac{1}{2}$;

4) $\cos a$;

5) e^{-2};

6) $a^a \ln \frac{a}{e}$.

4.6 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler o parágrafo 4.3 desta unidade;

2) Do livro *Elementos de Análise Matemática-Parte I*, ler as páginas de 85 a 86;

3) Elaborar uma lista dos principais limites notáveis abordados;

4) Resolver os exercícios do parágrafo 4.4 desta unidade;

5) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 216, 217, 218, 219, 221, 222, 223, 225, 226, 229, 232, 233, 234, 235, 239, 211, 242, 243, 244, 247, 248, 249, 250, 251, 257, 259, 261.

4.7 Auto-avaliação

1) Escreva os limites notáveis que conhece;

2) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$;

3) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$;

4) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos\sqrt{x}}$;

5) Calcule $\lim\limits_{x\to \infty} x(\ln(1+x) - \ln x)$;

6) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}, \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0$.

4.8 Chave de correcção

1) Veja a definição dada no parágrafo 3.3 desta unidade;

2) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

Resolução. Pegamos a expressão $1-\cos x$ e vamos fazer algumas transformações:

$$1-\cos x=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\cos 2\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2},$$

pois $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$. ■

3) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$;

Resolução. Vamos explorar a fórmula

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Assim,

$$\cos x-\cos 3x=2\sin\frac{x+3x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}=2\sin 2x\sin x.$$

Calculando o limite temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\sin x}{x^2}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\sin x}{x}=4.\quad ■$$

4) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

Resolução. Vamos multiplicar e dividir por $1-\sqrt{\cos x}$ e ter em conta que

$$1-\cos\sqrt{x}=2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Assim,

$$\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\frac{1-\cos x}{(1+\sqrt{\cos x})2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{(1+\sqrt{\cos x})2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}.$$

Passando para o limite obtemos zero, pois o numerador comporta-se como x^2 enquanto que o denominador comporta-se como x. ■

5) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(1+x)-\ln x)$;

Resolução. Temos que

$$\lim_{x\to\infty}x(\ln(1+x)-\ln x)=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1.$$

Fizemos a substituição $x=\dfrac{1}{t}$. ■

6) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a>0,\ b>0,\ c>0$;

Resolução. Temos uma indeterminação do tipo 1^∞. Sendo assim,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}.$$

Vamos calcular o limite que está no expoente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1+1\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x-1}{3}+\frac{b^x-1}{3}+\frac{c^x-1}{x}+1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^x-1}{3}+\frac{b^x-1}{3}+\frac{c^x-1}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\ln\sqrt[3]{abc}.$$

Deste modo

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}.\quad ■$$

5 Unidade V. Comparação de infinitésimos

5.1 Introdução

Por definição, uma função é infinitésima, quando x tende para a, se o seu limite é igual a zero. A razão entre dois infinitésimos pode comportar-se de diferentes maneiras: pode ser um *número finito*, pode tender para *infinito*, pode tender para *zero* ou mesmo *pode não ter limite*.

5.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Definir infinitésimos da mesma ordem e infinitésimos equivalentes;

2) Aplicar infinitésimos equivalentes no cálculo de limites.

5.3 Comparação de infinitésimos

Dois infinitésimos comparam-se entre si com ajuda das suas razões. Sejam $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ dois infinitésimos, quando x tende para a.

Definição 16. *Diremos que* $\alpha(x)$ *e* $\beta(x)$ *são dois* **infinitésimos da mesma ordem** *se*

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0.$$

No caso particular quando $c = 1$ diremos que $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ são dois *infinitésimos equivalentes*. A denotação usada é: $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to a$.

Exemplo 29. *Compare os infinitésimos* $\alpha = 3x^2$ *e* $\beta = 14x^2$, $x \to 0$.

Resolução. Vamos determinar o limite do quociente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{14x^2} = \frac{3}{14}.$$

Logo, pela definição dada, os infinitésimos $\alpha = 3x^2$ e $\beta = 14x^2$, quando $x \to 0$, são da mesma ordem.

Exemplo 30. *Compare os infinitésimos* $\alpha = \sin x$ *e* $\beta = \ln(1 + x)$, $x \to 0$.

Resolução. Vamos determinar o limite do quociente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\ln(1 + x)} = 1.$$

Logo, pela definição dada, os infinitésimos $\alpha = \sin x$ e $\beta = \ln(1 + x)$, quando $x \to 0$, são equivalentes.

Definição 17. *Se* $\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, *então diremos que* $\alpha(x)$ *é um* **infinitésimo de maior ordem** *que* $\beta(x)$. *A denotação usada é* $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \to a$.

Exemplo 31. *Compare os infinitésimos* $\alpha = 3x^4$ *e* $\beta = 7x$, $x \to 0$.

Resolução. Vamos determinar o limite do quociente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^4}{7x} = 0.$$

Logo, pela definição dada, o infinitésimos $\alpha = 3x^4$ é de ordem superior em relação ao infinitésimo $\beta = 7x$, quando $x \to 0$.

Exemplo 32. *Verifique se* $1 - \cos x = o(x)$, $x \to 0$.

Resolução. Temos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{2x} = 0$$

daí que é correcta a igualdade $1 - \cos x = o(x)$, $x \to 0$.

5.4 Aplicação de infinitésimos no cálculo de limites

Dentre os infinitésimos da mesma ordem um papel importante no cálculo de limites jogam os infinitésimos equivalentes. Eis alguns infinitésimos equivalentes:

1) $\sin x \sim x\,,\ x \to 0\,;$

2) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}\,,\ x \to 0\,;$

3) $\ln(1+x) \sim x\,,\ x \to 0\,;$

4) $e^x - 1 \sim x\,,\ x \to 0\,;$

5) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x\,,\ x \to 0\,;$

6) $\operatorname{tg} x \sim x\,,\ x \to 0\,.$

Exemplo 33. *Calcule* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$.

Resolução. Aplicando as equivalências temos $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$ e $\sin 3x \sim 3x$, quando $x \to 0$. Assim,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Exemplo 34. *Calcule* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}$.

Resolução. Aplicando as equivalências temos $\arcsin(x-1) \sim x-1$ e $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) \sim -3(x-1)$, quando $x \to 1$. Assim,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{-3(x-1)} = -\frac{1}{3}.$$

5.5 Exercícios

1) Suponhamos que $x \to 0$. Extraia o termo principal do tipo cx^n (c é constante) e defina a ordem infinitésimal em ordem a x, para $f(x) = 2x - 3x^3 + x^5$;

2) Suponhamos que $x \to 0$. Extraia o termo principal do tipo cx^n (c é constante) e defina a ordem infinitésimal em ordem a x, para $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$;

3) Suponhamos que $x \to 0$. Extraia o termo principal do tipo cx^n (c é constante) e defina a ordem infinitésimal em ordem a x, para $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$;

4) Seja $x \to 1$. Extraia o membro principal da forma $c(x-1)^n$ para $f(x) = \ln x$;

5) Seja $x \to 1$. Extraia o membro principal da forma $c(x-1)^n$ para $f(x) = e^x - e$;

6) Seja $x \to +\infty$. Extraia o membro principal da forma $c\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ para $f(x) = \dfrac{x+1}{x^4+1}$;

7) Seja $x \to +\infty$. Extraia o membro principal da forma $c\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ para $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$;

8) Seja $x \to +\infty$. Extraia o membro principal da forma $c\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ para $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$;

9) Seja $x \to +\infty$. Extraia o membro principal da forma cx^n para $f(x) = x^2 + 100x + 10000$;

10) Seja $x \to +\infty$. Extraia o membro principal da forma cx^n para $f(x) = \dfrac{2x^5}{x^3 - 3x + 1}$.

5.6 Respostas

1) $c = 2$ e $n = 1$;

2) $c = 1$ e $n = 1$;

3) $c = \dfrac{1}{2}$ e $n = 3$;

4) $c = 1$ e $n = 1$;

5) $c = e$ e $n = 1$;

6) $c = 1$ e $n = 3$;

7) $c = \dfrac{1}{2}$ e $n = \dfrac{1}{2}$;

8) $c = 1$, $n = 2$;

9) $c = 1$ e $n = 2$;

10) $c = 2$ e $n = 2$.

5.7 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafo 5.3 e 5.4 desta unidade;

2) Do livro *Elementos de Análise Matemática-Parte I*, ler as páginas de 85 a 100;

3) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

4) Resolver os exercícios do parágrafo 5.5 desta unidade;

5) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 289, 293, 296, 298, 301.

5.8 Auto-avaliação

1) Dê a definição de infinitésimo;

2) Dê a definição de infinitésimos equivalentes;

3) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$, onde m e n são elementos de $\mathbb{N}$;

4) Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$;

5) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$, m e n são elementos de $\mathbb{Z}$;

6) Calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

7) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$;

8) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$.

5.9 Chave de correcção

1) Veja a definição dada no parágrafo 5.3 desta unidade;

2) Veja a definição dada no parágrafo 5.3 desta unidade;

3) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, onde m e n são elementos de $\mathbb{N}$;

Resolução. Fazendo uso do binómio de Newton temos:

$$(1+mx)^n = 1+mnx+\frac{n(n-1)}{2}m^2x^2+\binom{n}{3}m^3x^3+\cdots+\binom{n}{n}m^nx^n$$

e

$$(1+nx)^m = 1+mnx+\frac{m(m-1)}{2}n^2x^2+\binom{m}{3}n^3x^3+\cdots+\binom{m}{m}n^mx^m.$$

Quando $x\to 0$ são válidas as igualdades:

$$\binom{n}{3}m^3x^3+\cdots+\binom{n}{n}m^nx^n=o(x^2),\quad \binom{m}{3}n^3x^3+\cdots+\binom{m}{m}n^mx^m=o(x^2).$$

Deste modo têm lugar as fórmulas assimptóticas:

$$(1+mx)^n=1+mnx+\frac{n(n-1)}{2}m^2x^2+o(x^2),\quad (1+nx)^m=1+mnx+\frac{m(m-1)}{2}n^2x^2+o(x^2).$$

Colocando estas expressões no numerador e após algumas operações teremos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2^{-1}nm(n-m)x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}mn(n-m).\quad \blacksquare$$

4) Calcule $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$;

Resolução. Façamos a substituição $x-1\equiv\theta\to 0$. Então

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=\lim_{\theta\to 0}\frac{(1+\theta)^{100}-2\theta-1}{(1+\theta)^{50}-2\theta-1}.$$

Considerando as fórmulas

$$(1+\theta)^n=1+n\theta+o(\theta),\quad \theta\to 0,$$

temos:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{100\theta-2\theta+o(\theta)}{50\theta-2\theta+o(\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{98\theta+o(\theta)}{48\theta+o(\theta)}=\frac{49}{24}.\quad \blacksquare$$

5) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$, m e n são elementos de $\mathbb{Z}$;

Resolução. Temos que

$$\sqrt[m]{1+\alpha x}=1+\frac{\alpha}{m}x+o(x),\quad \sqrt[n]{1+\beta x}=1+\frac{\beta}{n}x+o(x),\quad x\to 0.$$

Colocando estas fórmulas assimptóticas na nossa expressão temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\alpha}{m}x-\frac{\beta}{n}x+o(x)}{x}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}.\quad \blacksquare$$

6) Calcule $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

Resolução. Considerando o facto que

$$\ln(1+3^x)\sim 3^x,\quad x\to-\infty,\quad \ln(1+2^x)\sim 2^x,\quad x\to-\infty$$

temos

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{2^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0.\quad \blacksquare$$

7) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$;

Resolução. Vamos determinar as fórmulas assimptóticas para $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ e $\ln(1+xe^x)$, quando $x\to 0$. Temos:

$$\ln(1+\sqrt{1+x^2}) = \ln(1+x+\sqrt{1+x^2}-1) = \ln\left(1+x+\frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) = \ln(1+x+o(x)) = x+o(x),$$

$$\ln(1+xe^x) = x+o(x), \quad x\to 0.$$

Deste modo é fácil ver que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x+o(x)} = 1. \quad \blacksquare$$

8) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$.

Resolução. Temos que

$$\ln(x^2+e^x) = \ln(1+x^2+e^x-1) = \ln[1+e^x-1+o(x)] = e^x-1+o(x) = x+o(x), \quad x\to 0,$$

$$\ln(x^4+e^{2x}) = \ln(1+e^{2x}-1+x^4) = \ln[1+e^{2x}-1+o(x)] = e^{2x}-1+o(x) = 2x+o(x), \quad x\to 0.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{2x+o(x)} = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

6 Unidade VI. Continuidade de funções

6.1 Introdução

Rudimentarmente falando, uma função é contínua se uma variação pequena na variável independente causa uma variação pequena no valor da função. Geometricamente, *uma função é contínua num intervalo se o seu gráfico está ligado, isto é, não tem quebras*. Popularmente falando, diz-se que uma função é contínua se o seu *gráfico pode ser esboçado sem que se levante a caneta do papel.*

6.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Definir função contínua;

2) Classificar os pontos de descontinuidade.

6.3 Continuidade em termos de limite

Definição 18. *Diremos que a função $f(x)$ é* **contínua** *no ponto $x = a$ se:*

1) A função $f(x)$ está definida no ponto $x = a$;

2) O limite de $f(x)$ quando x tende para a existe;

3) Este limite é igual a $f(a)$.

Definição 19. *A função $f(x)$ é* **contínua à direita** *do ponto a se $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a)$. A notação usada é: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a^+)$.*

Definição 20. *A função $f(x)$ é* **contínua à esquerda** *do ponto a se $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a)$. A notação usada é: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a^-)$.*

Exemplo 35. *Investigue a continuidade da função $f(x) = |x|$.*

Resolução. Por definição,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x > 0, \\ 0, & \text{se} \quad x = 0, \\ -x, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

O ponto que suscita dúvidas, sobre a continuidade da função $f(x) = |x|$, é $x = 0$. Vamos verificar se $f(x)$ é contínua nesse ponto:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0,$$

portanto a função $f(x) = |x|$ é contínua em todo o seu domínio de definição.

Exemplo 36. *Calcule o valor de A de modo que a função*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{se} \quad x \neq 0, \\ \\ A & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

seja contínua no ponto $x = 0$.

Resolução. Se $f(x)$ é contínua no ponto $x = 0$, então:

$$A = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2.$$

Exemplo 37. *A função*

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$$

não tem significado, quando $x = 0$. Defina $f(0)$, de modo que $f(x)$ seja contínua no ponto $x = 0$.

Resolução. Para que a função $f(x)$ seja contínua no ponto $x = 0$ é preciso definir $f(0)$ de tal modo que

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x).$$

Façamos a substituição $1 + x = t^6 \to 1,\ x \to 0$. Então,

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{t \to 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{2}{3}.$$

A função $f(x)$ é contínua em $E \subset \mathbb{R}$ se ela é contínua em cada ponto de E. A função $f(x)$ é contínua no segmento $[a, b]$ se ela é contínua em cada ponto de (a, b), contínua à direita do ponto a e contínua à esquerda do ponto b.

Se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas no ponto a, então $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ e, se $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ são contínuas no ponto a.

Teorema 13. *(Primeiro teorema de Weierstrass) Se a função $f(x)$ é contínua num intervalo fechado, então ela é limitada nesse intervalo fechado.*

Teorema 14. *(Segundo teorema de Weierstrass) Se a função $f(x)$ é contínua num intervalo fechado, então ela atinge os seus valores máximo e mínimo nesse intervalo fechado.*

6.4 Classificação dos pontos de descontinuidade

Se uma das três condições dadas na definição de função contínua não é satisfeita dizemos que $f(x)$ é *descontínua* em a.

Definição 21. *Diremos que a é* **ponto de descontinuidade** *da função $f(x)$ se $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.*

Definição 22. *Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$ mas não existe $f(a)$, então a é* **ponto de descontinuidade evitável**.

Definição 23. *Se os limites laterais em a são finitos, mas $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$, então a é* ponto de descontinuidade do tipo salto.

Os pontos de descontinuidade evitável e descontinuidade do tipo salto são chamados *pontos de descontinuidade de primeira espécie.*

Quando um ou ambos limites laterais numa vizinhança do ponto a não existem ou são iguais a infinito, diremos que a é *ponto de descontinuidade de segunda espécie.*

Exemplo 38. *Dada a função*

$$f(x) = \begin{cases} 10.5 & , \text{ se } 0 \leq x < 10, \\ x + 1 & , \text{ se } 10 \leq x < 14, \\ x - 1 & , \text{ se } 14 \leq x < 30, \\ 29 & , \text{ se } 30 \leq x < 42, \end{cases}$$

determine os valores de x para os quais $f(x)$ é descontínua e classifique esses pontos de descontinuidade.

Resolução. Nos pontos $x = 10$ e $x = 14$ a função está definida, mas não tem limite nesses pontos. A função possui descontinuidade tipo salto nos pontos $x = 10$ e $x = 14$.

Exemplo 39. *Dada a função*

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & , \text{ se } 0 \leq x < 1, \\ 4x - 2 & , \text{ se } x \geq 1, \end{cases}$$

determine o seu ponto de descontinuidade e com ajuda de limites laterais classifique o ponto de descontinuidade.

Resolução. Temos: $\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (3x^2 + 1) = 4$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1} (4x - 2) = 2$. O ponto $x = 1$ é ponto de descontinuidade tipo salto.

Exemplo 40. *Dada a função $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$, determine os pontos de descontinuidade e caracterize-os.*

Resolução. Esta função está definida em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. O ponto $x = -1$ é de descontinuidade de segunda espécie, pois $\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$.

Exemplo 41. *Investigue a continuidade da função $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 1$.*

Resolução. Temos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{se} \quad x > 0, \\ 1, & \text{se} \quad x = 0, \\ -\dfrac{\sin x}{x}, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Vamos verificar se $f(x)$ é contínua no ponto $x = 0$. Para tal, precisamos de calcular os limites laterais desta função no ponto $x = 0$:

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0),$$

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = -1 \neq f(0).$$

A função $f(x)$ é descontínua no ponto $x = 0$, pois $f(0^+) = f(0) \neq f(0^-)$. Contudo, ela é contínua à direita do ponto $x = 0$.

6.5 Exercícios

1) Calcule o valor de A de modo que a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} + \dfrac{e^{3x} - 1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0, \\ A & \text{se} \quad x = 0, \end{cases}$$

seja contínua no ponto $x = 0$;

2) Seja

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se} \quad x < 0 \\ A + x, & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Determine A de modo que $f(x)$ seja contínua;

3) Calcule o valor de A de modo que a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2} & \text{se} \quad x \neq 0, \\ A & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

seja contínua no ponto $x = 0$;

4) A função

$$I(t) = \begin{cases} 10.5 & , \ \text{se} \ \ 0 \leq t < 12, \\ 11 & , \ \text{se} \ \ 12 \leq t < 16, \\ 11.5 & , \ \text{se} \ \ 16 \leq t < 28, \\ 11 & , \ \text{se} \ \ 28 \leq t < 32, \end{cases}$$

fornece a taxa de juros (em percentagem) como função do tempo para as primeiras 32 semanas do ano. Determine os valores de t para os quais $I(t)$ é descontínua e classifique esses pontos de descontinuidade. Calcule $I(12)$, $I(16)$ e $I(30)$.

5) Com ajuda de limites laterais investigue a continuidade da função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & , \ \text{se} \ \ 2 \leq x < 7, \\ 40 & , \ \text{se} \ \ x \geq 7; \end{cases}$$

6) Dada a função $f(x) = \dfrac{1+x}{1+x^3}$, determine os pontos de descontinuidade e caracterize-os.

6.6 Respostas

1) 5;

2) $A = 1$;

3) $A = 2$;

4) A função dada é descontínua nos pontos $t = 12$, $t = 16$ e $t = 28$. Os valores de $I(t)$ nos pontos 12, 14 e 30 são 11, 11.5 e 11, respectivamente;

5) A função é descontinua no ponto $x = 7$ tipo salto;

6) O ponto $x = -1$ é ponto de descontinuidade evitável.

6.7 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 6.3 e 6.4 desta unidade;

2) Do livro *Elementos de Análise Matemática-Parte II*, ler as páginas de 8 a 14;

3) No capítulo 7, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte I*, ler as páginas de 262 a 267, 270, 276 a 280 e resolver os exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 do parágrafo 7.7, e exercícios 1, 2, 3, 4, 5 e 6 do parágrafo 7.9;

4) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

5) Resolver os exercícios do parágrafo 6.5 desta unidade;

6) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 304, 305, 309, 313, 316, 317, 331, 340.

6.8 Auto-avaliação

1) Dê a definição de função contínua no ponto;

2) Dê a definição de descontinuidade evitável;

3) Investigue a continuidade da função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{se } x \neq 2, \\ A, & \text{se } x = 2; \end{cases}$$

4) Investigue a continuidade da função $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$;

5) Determine o valor de A de modo que a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}, & \text{se } x \neq 3, \\ A, & \text{se } x = 3, \end{cases}$$

seja contínua no ponto $x = 3$;

6) Calcule o valor de A de modo que a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 4x}{x} + \dfrac{e^{6x} - 1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ A & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

seja contínua no ponto $x = 0$;

7) A função

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$$

não tem significado, quando $x = 0$. Defina $f(0)$, de modo que $f(x)$ seja contínua no ponto $x = 0$;

8) Com ajuda de limites laterais investigue a continuidade da função

$$f(x)=\begin{cases} 3x+1 & , \quad \text{se} \quad 0\le x<3, \\ \\ 5x-5 & , \quad \text{se} \quad x\ge 3. \end{cases}$$

6.9 Chave de correcção

1) Veja a definição dada no parágrafo 6.3 desta unidade;

2) Veja a definição dada no parágrafo 6.4 desta unidade;

3) Investigue a continuidade da função

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{se} \quad x\neq 2, \\ \\ A, & \text{se} \quad x=2; \end{cases}$$

Resolução. Precisamos verificar se $f(x)$ é contínua no ponto $x=2$. Temos:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

Em conclusão, se $A=f(2)$ é igual a 4, então $f(x)$ é contínua no ponto $x=2$, consequentemente ela é contínua em todo o seu domínio. ■

4) Investigue a continuidade da função $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, se $x\neq 0$ e $f(0)=0$;

Resolução. Vamos calcular os limites laterais da função no ponto $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=e^{-\frac{1}{0}}=e^{-\infty}=0, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)=e^{-\frac{1}{0}}=e^{-\infty}=0.$$

Logo, $f(x)$ é contínua. ■

5) Determine o valor de A de modo que a função

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-27}{x-3}, & \text{se} \quad x\neq 3, \\ \\ A, & \text{se} \quad x=3, \end{cases}$$

seja contínua no ponto $x=3$;

Resolução. Temos:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x^2+3x+9)=27.$$

Em conclusão, se $A=f(3)$ fôr igual a 27, então $f(x)$ é contínua no ponto $x=3$. ■

6) Calcule o valor de A de modo que a função

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 4x}{x}+\dfrac{e^{6x}-1}{x} & \text{se} \quad x\neq 0, \\ \\ A & \text{se} \quad x=0 \end{cases}$$

seja contínua no ponto $x=0$;

Resolução. Se $f(x)$ é contínua no ponto $x=0$, então:

$$A=f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}+\frac{e^{6x}-1}{x}\right)=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}+6\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{6x}=10. \quad ■$$

7) A função

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$$

não tem significado, quando $x=0$. Defina $f(0)$, de modo que $f(x)$ seja contínua no ponto $x=0$;

Resolução. Para que a função $f(x)$ seja contínua no ponto $x=0$ é preciso definir $f(0)$ de tal modo que

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x).$$

Façamos a substituição $1+x=t^6\to 1,\ x\to 0$. Então,

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}=\frac{3}{2}. \quad ■$$

8) Com ajuda de limites laterais investigue a continuidade da função

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & , \quad \text{se } \ 0 \le x < 3, \\ \\ 5x-5 & , \quad \text{se } \ x \ge 3. \end{cases}$$

Resolução. O ponto onde suscita dúvidas sobre a continuidade da função é $x = 3$. Calculando os limites laterais vemos que $\lim\limits_{x \to 3-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3-} (3x + 1) = 10$, $\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3-} (5x - 5) = 10$ e $f(3) = 10$. A função dada é contínua em todo o seu domínio. ∎

7 Unidade VII. Derivada e diferencial de funções

7.1 Introdução

A *derivada* é uma das noções fundamentais da Matemática. Ela tem aplicação na resolução de inúmeros problemas da matemática, física e outras ciências, em particular no estudo da velocidade de diferentes processos.

7.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Definir derivada e diferencial de função;

2) Conhecer as regras de derivação;

3) Conhecer o sentido geométrico e mecânico da derivada.

7.3 Definição de derivada e diferencial

Seja $f(x)$ uma função definida numa certa vizinhança do ponto x_0. A expressão

$$\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

chamaremos *acréscimo* da função $f(x)$ no ponto x_0 correspondente ao acréscimo Δx do seu argumento x.

Definição 24. *A expressão*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

chamaremos, caso exista, **derivada** *da função* $f(x)$ *no ponto* x_0. *A denotação usada é* $f'(x_0)$ *ou* $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Exemplo 42. *Determine o acréscimo* Δx *do argumento* x *e o respectivo acréscimo* Δy *da função* $f(x) = \log x$, *se* x *varia de 1 até 1000.*

Resolução. Temos $x_0 = 1$, $x_0 + \Delta x = 1000$, portanto $\Delta x = 1000 - 1 = 999$. O acréscimo Δf é: $f(1000) - f(1) = \log 1000 - \log 1 = 3$.

Exemplo 43. *Usando a definição, determine a derivada da função* $f(x) = x^2$.

Resolução. Por definição

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Temos:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta^2 x.$$

Assim,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta^2 x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Diremos que a função $f(x)$ é *diferenciável* no ponto x_0 se o seu acréscimo Δf neste ponto, correspondente ao acréscimo Δx do argumento x, admite a representação

$$\Delta f = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

onde A é um certo valor, não dependente de Δx, α é uma função dependente de Δx, infinitamente pequena e contínua no ponto $\Delta x = 0$.

Teorema 15. *Para que a função* $f(x)$ *seja diferenciável no ponto* x_0 *é necessário e suficiente que exista a derivada* $f'(x_0)$.

Neste caso o acréscimo é $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x$.

A função linear homogénea de argumento Δx definida por $df = f'(x_0)\Delta x$ $(f'(x_0) \neq 0)$ chamaremos *diferencial* da função $f(x)$ no ponto x_0. Para valores de Δx muito pequenos temos $\Delta f \approx df$, isto é,

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

7.4 Sentido geométrico e mecânico da derivada

Se a função $f(x)$ possui derivada no ponto x_0 igual a $f'(x_0)$, então o gráfico desta função tem no ponto $M(x_0, f(x_0))$ uma tangente, sendo o seu coeficiente angular igual a $f'(x_0)$. Isto é, a *equação da tangente* ao gráfico de $f(x)$ no ponto M é $y(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

A *equação da normal*, isto é, a recta que passa pelo ponto tangencial $M(x_0, f(x_0))$ e perpendicular à tangente é $y(x) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$.

Esta é a *interpretação geométrica* da derivada.

Sejam $x(t)$, $y(t)$ as coordenadas dum ponto N, no plano, no momento t e sejam $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ dois vectores unitários perpendiculares. O vector $\mathbf{r} = \overrightarrow{ON}$ podemos escrever

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

e a sua derivada

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}.$$

Esta derivada $\mathbf{r}'(t)$ expressa o vector *velocidade instântanea* do ponto N no momento t e está orientado segundo a tangente à trajectória.

Esta é a *interpretação mecânica* da derivada.

Exemplo 44. *Pelos pontos $A(2,4)$ e $B(2+\Delta x, 4+\Delta y)$ da curva $y = x^2$ passa a secante AB. Determine o valor do coeficiente angular desta secante se $\Delta x = 1$. Qual é o valor do coeficiente angular da tangente à esta curva no ponto A?*

Resolução. O ponto A tem as coordenadas $x_A = 2$, $y_A = 4$ e o ponto B tem as coordenadas $x_B = 2 + \Delta x$, $y_B = 4 + \Delta y$. O coeficiente angular da secante AB é

$$k_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 + \Delta y - 4}{2 + \Delta x - 2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Se $x = 2$ e $\Delta x = 1$, então $\Delta y = (2+1)^2 - 2^2 = 5$, portanto $k_1 = \dfrac{5}{1} = 5$.

O coeficiente angular da tangente à curva $y = x^2$, no ponto $A(2,4)$, é igual à $y'(2)$. Calculando a derivada de $y = x^2$, quando $x = 2$, temos $k_2 = y'(2) = 4$.

Exemplo 45. *A lei de movimento dum ponto no eixo OX dá-se pela fórmula $x(t) = 10t + 5t^2$, onde t é o tempo (em segundos) e x é a distância (em metros). Determine a velocidade média do movimento, no intervalo de tempo $20 \le t \le 20 + \Delta t$, e calcule essa velocidade se $\Delta t = 1$, $t_0 = 20$.*

Resolução. A velocidade média é igual ao quociente do espaço percorrido sobre o tempo que o ponto levou a percorrer esse espaço. Assim,

$$v_m(t_0) = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{10(t_0 + \Delta t) + 5(t_0 + \Delta t)^2 - 10t_0 - 5t_0^2}{\Delta t} = 10 + 10t_0 + 5\Delta t.$$

A velocidade média, no intervalo de tempo $20 \le t \le 20 + \Delta t$, $\Delta t = 1$ é

$$10 + 10 \cdot 20 + 5 \cdot 1 = 215\text{m/s}.$$

7.5 Regras de derivação e tabela de derivadas

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x)$ e $g(x)$ duas funções que possuem derivadas. Então,

1) $(\alpha)' = 0$;

2) $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$;

3) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;

4) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

5) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \not\equiv 0$.

Seja x a variável independente. Então,

1) $(x^n)' = nx^{n-1}$;

2) $(\sin x)' = \cos x$;

3) $(\cos x)' = -\sin x$;

4) $(\text{tg } x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \ \left(x \ne \dfrac{\pi}{2} + n\pi, n = 0, \pm 1, \ldots\right)$;

5) $(\text{ctg } x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \ (x \ne n\pi, n = 0, \pm 1, \ldots)$;

6) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1 < x < 1)$;

7) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1 < x < 1)$;

8) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

9) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

10) $(a^x)' = a^x \ln a$, $(a > 0, a \neq 1)$.

Definição 25. *A expressão*

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

chama-se **derivada** *de* $f(x)$ **à esquerda** *do ponto* x_0. *Denota-se* $f'_-(x_0)$.

Definição 26. *A expressão*

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

chama-se **derivada** *de* $f(x)$ **à direita** *do ponto* x_0. *Denota-se* $f'_+(x_0)$.

Para que a função $f(x)$ tenha derivada no ponto x_0 é necessário e suficiente que $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. A afirmação “a função tem derivada” entendemos a existência de derivada finita.

A expressão para o cálculo da derivada pode se apresentar de outra maneira equivalente. Se fizermos $x_0 + \Delta x = x$ temos:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Exemplo 46. *Determine a derivada da função* $f(x) = 2 + x - x^2$.

Resolução. Aplicamos a regra de derivação para a soma de funções. Assim,

$$f'(x) = (2 + x - x^2)' = 2' + x' - (x^2)' = 0 + 1 - 2x = 1 - 2x.$$

Exemplo 47. *Calcule* $f'(2)$ *se* $f(x) = x^2 \sin(x-2)$.

Resolução. Vamos primeiro determinar $f'(x)$ e, para tal, faremos uso da regra de derivação dum produto. Assim,

$$f'(x) = (x^2 \sin(x-2))' = (x^2)' \sin(x-2) + x^2(\sin(x-2))' = 2x\sin(x-2) + x^2\cos(x-2).$$

Particularizando $x = 2$ temos $f'(2) = 4$.

Exemplo 48. *Determine a derivada da função* $f(x) = \dfrac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Resolução. A expressão $\sqrt{a^2 + b^2}$ é constante e, por isso mesmo, podemos tirá-la debaixo do sinal da derivada. Assim,

$$f'(x) = \left(\frac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(ax^6 + b)' = \frac{6ax^5}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exemplo 49. *Determine a derivada da função* $f(x) = (\sin x)\sqrt[3]{x^2}$.

Resolução. Aplicamos a regra de derivação para o caso quando temos o produto de duas funções $g(x) = \sin x$ e $h(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$. Assim,

$$f'(x) = [g(x)h(x)]' = g'(x)h(x) + g(x)h'(x).$$

Determinamos, primeiro, $g'(x) = (\sin x)' = \cos x$ e $h'(x) = (x^{2/3})' = \dfrac{2}{3}x^{-1/3}$. Em conclusão,

$$f'(x) = (\cos x)\sqrt[3]{x^2} + \frac{2\sin x}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Exemplo 50. *Determine a derivada da função* $\dfrac{a + bx}{c + dx}$.

Resolução. Aplicamos a regra de derivação para o caso quando temos o quociente de funções. É claro que neste exemplo devemos fazer a restrição $c + dx \neq 0$. Deste modo,

$$f'(x) = \left(\frac{a + bx}{c + dx}\right)' = \frac{(a + bx)'(c + dx) - (a + bx)(c + dx)'}{(c + dx)^2} =$$

$$= \frac{b(c + dx) - d(a + bx)}{(c + dx)^2} = \frac{bc - da}{(c + dx)^2}.$$

7.6 Exercícios

1) Usando a definição de derivada, determine a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$;

2) Usando a definição de derivada, determine a derivada da função $f(x) = x^3$;

3) Calcule $f'(2)$ se $f(x) = x^2 \sin(x-2)$;

4) Determine a derivada da função $y(t) = 2t \sin t - (t^2 - 2)\cos t$;

5) Determine a derivada da função $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$;

6) Determine as derivadas laterais da função $f(x) = |x|$, no ponto $x = 0$;

7) Que ângulo forma com o eixo das abcissas a tangente à curva $y(x) = x - x^2$ no ponto com abcissa $x = 1$?

8) Em que ponto a tangente à parábola $y = x^2 - 7x + 3$ é paralela à recta $5x + y - 3 = 0$?

9) Escreva a equação da parábola $y = x^2 + bx + c$, que é tangente à recta $y = x$ no ponto $(1, 1)$.

10) Determine o ponto da curva $y^2 = 2x^3$ onde a sua tangente é perpendicular à recta $4x - 3y + 2 = 0$.

7.7 Respostas

1) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

2) $3x^2$;

3) $f'(2) = 4$;

4) $t^2 \sin t$;

5) $\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$;

6) $f'_+(0) = 1,\ f'_-(0) = -1$;

7) $\dfrac{3\pi}{4}$;

8) $x = 1,\ y = -3$;

9) $b = -1,\ c = 1$;

10) $x_0 = \dfrac{1}{8},\ y_0 = -\dfrac{1}{16}$.

7.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 7.3, 7.4 e 7.5 desta unidade;

2) No capítulo 6, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte I*, ler as páginas de 177 a 185, 188 a 190, 198 a 209 e resolver os exercícios 1 e 2 do parágrafo 6.1, exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 do parágrafo 6.2, exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 do parágrafo 6.4, exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 do parágrafo 6.6, exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11 do parágrafo 6.7;

3) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

4) Resolver os exercícios do parágrafo 7.6 desta unidade;

5) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 341, 343, 344, 347, 348, 358, 359, 360, 361, 362, 366, 366, 367, 368, 372, 373, 374, 376, 382, 384, 386, 388, 390, 392, 394, 396, 400, 625, 626, 628, 631.

7.9 Auto-avaliação

1) Dê a definição de derivada de função no ponto;

2) Enuncie as regras de derivação;

3) Explique o sentido geométrico da derivada;

4) À variável x faz-se um acréscimo Δx. Determine o acréscimo Δy se $y = ax + b$;

5) Demonstre que $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;

6) Dada a função $f(x) = e^{-x}$, determine $f(0) + xf'(0)$;

7) Mostre que a função $y(x) = xe^{-x}$ satisfaz a equação $xy'(x) = (1 - x)y(x)$;

8) Um ponto material move-se segundo a lei $s = \dfrac{t^3}{3} + 2t^2 - t$, onde s exprime-se em metros, t em segundos. Calcule a velocidade um segundo após o começo do movimento;

9) Um ponto material movimenta-se pelo eixo das abcissas segundo a lei

$$x(t) = \frac{1}{4}(t^4 - 4t^3 + 2t^2 - 12t).$$

Em que momento o ponto estará em repouso?

7.10 Chave de correcção

1) Veja a definição dada no parágrafo 7.3 desta unidade;

2) Veja as regras enunciadas no parágrafo 7.5 desta unidade;

3) Veja a interpretação dada no parágrafo 7.4 desta unidade;

4) À variável x faz-se um acréscimo Δx. Determine o acréscimo Δy se $y = ax + b$;

Resolução. Por definição, $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$. Assim,

$$\Delta y = [a(x + \Delta x) + b] - (ax + b) = a\Delta x. \quad \blacksquare$$

5) Demonstre que $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;

Resolução. Seja $F(x) \equiv f(x) + g(x)$. Vamos determinar o acréscimo de $F(x)$. Temos:

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = [f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)] =$$

$$= [f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x). \quad \blacksquare$$

6) Dada a função $f(x) = e^{-x}$, determine $f(0) + xf'(0)$;

Resolução. Começamos por calcular, directamente, $f(0) = e^{-0} = 1$. Agora vamos determinar $f'(0)$:

$$f'(x) = (e^{-x})' = -e^{-x} \Longrightarrow f'(0) = -e^{-0} = -1.$$

Assim, $f(0) + xf'(0) = 1 + x(-1) = 1 - x$. $\blacksquare$

7) Mostre que a função $y(x) = xe^{-x}$ satisfaz a equação $xy'(x) = (1 - x)y(x)$;

Resolução. Vamos determinar $y'(x) = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$. Colocando $e^{-x} - xe^{-x}$ no lugar de $y'(x)$ que se encontra na parte esquerda da equação, temos:

$$x(e^{-x} - xe^{-x}) = xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(1 - x) = y(x)(1 - x). \quad \blacksquare$$

8) Um ponto material move-se segundo a lei $s = \frac{t^3}{3} + 2t^2 - t$, onde s exprime-se em metros, t em segundos. Calcule a velocidade um segundo após o começo do movimento;

Resolução. A velocidade de um movimento rectilíneo é igual a derivada da função espaço em ordem ao tempo. Assim, $v(t) = \frac{dS(t)}{d(t)} = t^2 + 4t - 1$. Daqui concluímos que $v(1) = 1 + 4 - 1 = 4$ m/s. ■

9) Um ponto material movimenta-se pelo eixo das abcissas segundo a lei

$$x(t) = \frac{1}{4}(t^4 - 4t^3 + 2t^2 - 12t).$$

Em que momento o ponto estará em repouso?

Resolução. A velocidade obtemos ao diferenciar a função espaço em ordem ao tempo:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = t^3 - 3t^2 + t - 3.$$

O corpo quando estiver em repouso terá velocidade nula. Deste modo, resolvendo a equação $t^3 - 3t^2 + t - 3 = 0$ obtemos que depois de 3 segundos o corpo estará em repouso. ■

8 Unidade VIII. Derivada da função composta

8.1 Introdução

Suponha que y é uma função de u e que u é uma função de x. Então y é uma função composta de x. Suponha que x varia. Isto faz com que u varie e y também varie. Uma variação em x, por conseguinte, causa uma "reacção em cadeia". Se conhecemos as taxas de variação du/dx e dy/du, podemos determinar a taxa de variação dy/dx.

8.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Derivar funções compostas;

2) Derivar funções implícitas;

3) Derivar funções dadas na forma paramétrica.

8.3 Regra de cadeia

Seja $y = f(u)$ e $u = \varphi(x)$, então $y = f(\varphi(x))$ é função composta com argumento intermédio u e argumento independente x.

Teorema 16. *Se a função $u = \varphi(x)$ possui derivada u'_x no ponto x e a função $y = f(u)$ tem derivada y'_u no ponto $u = \varphi(x)$, então a função composta $y = f(\varphi(x))$ tem derivada no ponto x e essa derivada é $y'_x = y'_u u'_x$, isto é, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt}$.*

Resumindo, para determinar a derivada duma função composta temos de determinar a derivada da função dada em ordem ao argumento intermédio e multiplicar pela derivada do argumento intermédio em ordem à variável independente. Esta é a *regra de cadeia*

Exemplo 51. *Determine a derivada da função $f(y) = (2a + 3by)^2$.*

Resolução. A variável independente é y. Denotemos $2a + 3by = u(y)$. Então, $f(y) = u^2$ e $f'(y) = 2uu' = 2(2a + 3by)(2a + 3by)' = 12ab + 18b^2y$.

Exemplo 52. *Determine a derivada da função $f(x) = (1 + 3x - 5x^2)^{30}$.*

Resolução. Temos uma função composta do tipo $f(u) = u^{30}$, onde $u(x) = 1 + 3x - 5x^2$. Aplicando a regra de derivação para a função composta temos:

$$f'(x) = 30u^{29}u'(x) = 30(1 + 3x - 5x^2)^{29}(1 + 3x - 5x^2)' = 30(1 + 3x - 5x^2)^{29}(3 - 10x).$$

8.4 Derivada da função inversa

Teorema 17. *Dada a função $f(x)$, suponhamos que ela é contínua e estritamente monótona numa certa vizinhança do ponto x_0 e suponhamos, também, que existe a derivada $\frac{df(x_0)}{dx} \neq 0$. Então a função inversa $x = f^{-1}(y)$ tem derivada no ponto $y_0 = f(x_0)$ e tem lugar a igualdade*

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}.$$

Exemplo 53. *Usando a regra de diferenciação da função inversa, determine a derivada da função $y = \sqrt[3]{x-1}$.*

Resolução. A função inversa $x = y^3 + 1$ possui derivada $x'_y = 3y^2$. Logo,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

8.5 Derivada de função dada implicitamente e na forma paramétrica

Se a função é dada pela equação $y = f(x)$, resolúvel em ordem a y, então a função está dada na forma *explícita.* Uma função dada na forma *implícita* entende-se como sendo a função $F(x, y) = 0$, não resolúvel em ordem a y. Toda a função $y = f(x)$ podemos escrever na forma implícita por meio da equação $f(x) - y = 0$, mas o contrário não é verdade.

Se a função implícita é dada pela equação $F(x, y) = 0$, então para determinar-se a derivada de y em ordem a x não é necessário resolver a equação em ordem a y: basta derivar esta equação em ordem a x, considerando y como função de x e a equação obtida resolver em ordem a y'.

Exemplo 54. *Determine a derivada $y'(x)$ da função dada na forma implícita $2x - 5y + 10 = 0$.*

Resolução. Derivando em ordem a x temos:

$$\frac{d(2x - 5y + 10)}{dx} = 0 \Longrightarrow 2\frac{dx}{dx} - 5\frac{dy}{dx} + \frac{d10}{dx} = 2 - 5y' = 0 \Longrightarrow y'(x) = \frac{2}{5}.$$

Exemplo 55. *Determine a derivada $y'(x)$ da função dada na forma implícita $x^3 + y^3 = a^3$.*

Resolução. Derivando em ordem a x temos:

$$\frac{d(x^3 + y^3)}{dx} = 0 \Longrightarrow \frac{dx^3}{dx} + \frac{dy^3}{dx} = 3x^2 + 3y^2 y' = 0 \Longrightarrow y'(x) = -\frac{x^2}{y^2}.$$

Suponhamos que a dependência entre o argumento x e a função y é dada parametricamente na forma de duas equações

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

onde t é uma variável auxiliar chamada parâmetro.

Teorema 18. *Sejam $x = x(t)$ e $y = y(t)$ duas funções definidas num certo intervalo. Se, em todos os pontos desse intervalo, as funções $x = x(t)$ e $y = y(t)$ possuem derivadas $x'(t) \neq 0$ e $y'(t)$, então tem lugar a igualdade*

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

onde $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$, $y'_t = \dfrac{dy}{dt}$, $x'_t = \dfrac{dx}{dt}$.

Exemplo 56. *Dadas as funções $x = t^3, y = t^2$, determine y'_x.*

Resolução. Temos $x'_t = 3t^2, y'_t = 2t$. Logo, $y'_x = \dfrac{2t}{3t^2}$, isto é, $y'_x = \dfrac{2}{3t}$.

Exemplo 57. *Demonstre que a função y, dada na forma paramétrica*

$$x(t) = 2t + 3t^2, \quad y(t) = t^2 + 2t^3,$$

satisfaz a equação $y = (y'_x)^2 + 2(y'_x)^3$.

Resolução. Calculamos

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t + 6t^2}{2 + 6t} = \frac{t + 3t^2}{1 + 3t} = \frac{t(1 + 3t)}{1 + 3t} = t.$$

Assim,

$$y(t) = t^2 + 2t^3 = (y'_x)^2 + 2(y'_x)^3.$$

8.6 Exercícios

1) Determine a derivada da função $f(x) = e^{-x^3}$;

2) Determine a derivada da função $f(x) = 5\ln(1 - x)^2$;

3) Determine a derivada da função $f(x) = \sqrt{1 + \sin 2x}$;

4) Determine a derivada da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x}$;

5) Determine a derivada y'_x da função dada na forma paramétrica $x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t$;

6) Determine a derivada y'_x da função dada na forma paramétrica $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$;

7) Determine a derivada y'_x da função dada na forma paramétrica $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$;

8) Determine a derivadas y'_x da função dada na forma implícita $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$;

9) Determine a derivadas y'_x da função dada na forma implícita $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

10) Usando o teorema da derivada da função inversa mostre que $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

8.7 Respostas

1) $-3x^2 e^{-x^3}$;

2) $-\dfrac{10}{1-x}$;

3) $\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$;

4) $y'_x = -1$;

5) $y'_x = -\text{ctg } t$;

6) $y'_x = -\text{tg } t$;

7) $y' = \dfrac{1-x-y}{x-y}$;

8) $y' = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$;

9) $\dfrac{x^2+2}{x^2}$.

8.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 8.3, 8.4 e 8.5 desta unidade;

2) No o livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte I*, ler as páginas de 210 a 214, 234 a 238, 241 a 244 e resolver os exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11 do parágrafo 6.8, exercícios 2, 4, 5, 6 e 8 do parágrafo 7.1, exercícios 1 e 2 do parágrafo 7.2;

3) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

4) Resolver os exercícios do parágrafo 8.6 desta unidade;

5) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 414, 418, 421, 430, 432, 435, 443, 445, 451, 453, 582, 588, 595, 601, 607, 613, 614, 615.

8.9 Auto-avaliação

1) Enuncie a regra de cadeia;

2) Enuncie o teorema sobre a derivação da função inversa;

3) Escreva a fórmula de derivação duma função dada na forma paramétrica;

4) Determine a derivada da função $f(x) = 7e^{-x^2} + 6x\ln 2x + \sqrt{3-2x} + \dfrac{x^2+4}{x}$;

5) Determine a derivada da função $f(x) = \ln\ln\ln(\sin x^2 \cos^2 x)$;

6) Dada a função implícita $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ determine $y'(1)$, no ponto $(1, 2)$;

7) Usando o Cálculo Diferencial, demonstre que $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, onde $x \in [-1, 1]$;

8) Usando o teorema da derivada da função inversa mostre que $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

9) O raio da base de um cilindro aumenta com a velocidade de 3cm/s e a altura diminui com uma velocidade de 2cm/s. Determine a velocidade de variação do volume do cilindro.

8.10 Chave de correcção

1) Veja o teorema enunciado no parágrafo 8.3 desta unidade;

2) Veja o teorema enunciado no parágrafo 8.4 desta unidade;

3) Veja o teorema enunciado no parágrafo 8.4 desta unidade;

4) Determine a derivada da função $f(x) = 7e^{-x^2} + 6x\ln 2x + \sqrt{3-2x} + \dfrac{x^2+4}{x}$;

Resolução. Aplicando as regras de derivação temos:

$$f'(x) = -14xe^{-x^2} + 6\ln 2x + 6 - \frac{1}{\sqrt{3-2x}} + \frac{x^2-4}{x^2}. \quad \blacksquare$$

5) Determine a derivada da função $f(x) = \ln\ln\ln(\sin x^2\cos^2 x)$.

Resolução. Aplicando a regra de derivação para a função composta temos:

$$[\ln\ln\ln(\sin x^2\cos^2 x)]' = \frac{[\ln\ln(\sin x^2\cos^2 x)]'}{\ln\ln(\sin x^2\cos^2 x)} = \frac{[\ln(\sin x^2\cos^2 x)]'}{\ln\ln(\sin x^2\cos^2 x)\ln(\sin x^2\cos^2 x)} =$$

$$= \frac{(\sin x^2\cos^2 x)'}{\ln\ln(\sin x^2\cos^2 x)\ln(\sin x^2\cos^2 x)\sin x^2\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(\sin x^2)'\cos^2 x + \sin x^2(\cos^2 x)'}{\ln\ln(\sin x^2\cos^2 x)\ln(\sin x^2\cos^2 x)\sin x^2\cos^2 x} =$$

$$= \frac{2x\cos x^2\cos^2 x - 2\sin x^2\cos x\sin x}{\ln\ln(\sin x^2\cos^2 x)\ln(\sin x^2\cos^2 x)\sin x^2\cos^2 x}. \quad \blacksquare$$

6) Dada a função implícita $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ determine $y'(1)$, no ponto $(1,2)$;

Resolução. Temos:

$$3x^3 + 3y^2y' - y - xy' = 0 \Longrightarrow y'(3y^2 - x) = y - 3x^2 \Longrightarrow y' = \frac{y-3x^2}{3y^2-x}.$$

Assim, $y'(1) = \dfrac{2-3}{3\cdot 2^2 - 1} = -\dfrac{1}{11}$. $\blacksquare$

7) Usando o Cálculo Diferencial, demonstre que $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, onde $x \in [-1,1]$;

Resolução. Seja $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, logo $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Assim, concluímos que $f(x) = C$, onde C é uma constante. Pegando, por exemplo, $x = 0 \in [-1,1]$ obtemos $f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2} = C$. $\blacksquare$

8) Usando o teorema da derivada da função inversa mostre que $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

Resolução. Seja $y = \arcsin x$, então $x = \sin y$, logo $\dfrac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$. Assim, $(\arcsin x)' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $\blacksquare$

9) O raio da base de um cilindro aumenta com a velocidade de 3cm/s e a altura diminui com uma velocidade de 2cm/s. Determine a velocidade de variação do volume do cilindro.

Resolução. A fórmula que permite calcular o volume de um cilindro de raio r e altura h é $V = \pi r^2 h$. Já que o raio e a altura variam em ordem ao tempo, então elas são funções do tempo, isto é, $r = r(t)$ e $h = h(t)$. Assim, $V(t) = \pi r^2(t)h(t)$. Derivando esta função volume em relação à t temos:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \pi\left[2r(t)\frac{dr(t)}{dt}h(t) + r^2(t)\frac{dh(t)}{dt}\right].$$

Pelas condições do exercício temos $\dfrac{dr(t)}{dt} = 3\text{cm/s}$ e $\dfrac{dh(t)}{dt} = -2\text{cm/s}$ (aqui o sinal negativo deve-se ao facto da velocidade de variação da altura, segundo o exercício, diminuir). Colocando estes dados na fórmula acima obtida temos que $\dfrac{dV(t)}{dt} = \pi[6r(t)h(t) - 2r^2(t)]$. $\blacksquare$

9 Unidade IX. Derivadas e diferenciais de ordem superior

9.1 Introdução

A derivada duma função f é, habitualmente, chamada derivada de primeira ordem de f. Se f' é também diferenciável, então podemos derivar f' de modo a obter a *derivada de segunda ordem* e assim sucessivamente.

9.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Determinar derivadas e diferenciais de ordem superior;

2) Aplicar a derivada de segunda ordem em problemas de cinemática.

9.3 Derivada e diferencial de ordem superior

Seja $f'(x)$ a derivada da função $y = f(x)$ e suponhamos que esta derivada está definida numa certa vizinhança do ponto x.

Definição 27. *À expressão*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x},$$

caso exista, chamaremos **derivada de segunda ordem** *da função* $f(x)$. *A denotação usada é:* $f''(x)$ *ou* $f^{(2)}(x)$ *ou* $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

A *derivada de terceira ordem* define-se como derivada da segunda derivada e assim sucessivamente. De modo geral, se é conhecida a derivada de $(n-1)$- ésima ordem e ela tem derivada no ponto x, então tal derivada chama-se *derivada de* n *- ésima ordem* da função $f(x)$ no ponto x. A denotação usada é: $f^{(n)}(x)$ ou $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$. Uma função que possui a n- ésima derivada no ponto x_0 chama-se n *vezes diferenciável.*

A expressão

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n$$

chamaremos *diferencial de* n *- ésima ordem.*

Exemplo 58. *Dada a função* $y(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$, *determine* $y''(x)$.

Resolução. Determinamos, primeiro, a derivada $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{x'\sqrt{1-x^2} - x(\sqrt{1-x^2})'}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Vamos determinar agora $y''(x)$ e, para tal, começamos por logaritmizar a igualdade

$$y'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

isto é,

$$\ln y'(x) = -\frac{3}{2}\ln(1-x^2).$$

Derivando ambos os lados temos:

$$\frac{y''(x)}{y'(x)} = \frac{3x}{1-x^2} \Longrightarrow y''(x) = \frac{3x}{1-x^2} y'(x) = \frac{3x}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}.$$

Exemplo 59. *Dada a função* $y(x) = e^{-x^2}$, *determine* $y''(x)$.

Resolução. Determinamos a derivada de segunda ordem por etapas. Primeiro, vamos procurar a derivada de primeira ordem. Assim,

$$y'(x) = (e^{-x^2})' = (-x^2)'e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}.$$

Agora calculamos a derivada de segunda ordem:

$$y''(x) = [y'(x)]' = (-2xe^{-x^2})' = -2[x'e^{-x^2} + x(e^{-x^2})'] = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

Exemplo 60. *Determine* $d^5 y$ *para a função* $y = x^5$.

Resolução. Por definição, $d^5 y = y^{(5)} dy^5 = 120 dy^5$.

Exemplo 61. *Determine* $d^n y$ *para a função* $y = e^x$.

Resolução. Por definição, $d^n y = y^{(n)} dx^n$. Sabemos que $(e^x)^{(n)} = e^x$, portanto $d^n(e^x) = e^x dx^n$.

9.4 Sentido mecânico da derivada de segunda ordem

Suponhamos que o ponto material M desloca-se segundo o movimento rectílineo pela lei $s = x(t)$. Como já sabemos, a derivada s' é igual a velocidade instântanea do ponto: $s' = v$. Vamos mostrar que a *derivada de segunda ordem é igual a aceleração* do ponto material, isto é, $s'' = a$.

Seja v a velocidade no momento t e seja $v + \Delta v$ a velocidade no tempo $t + \Delta t$. A relação $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ expressa a aceleração média do ponto material no tempo Δt. O limite desta relação, quando $\Delta \to 0$, chamaremos *aceleração* do ponto M no momento dado t e denota-se pela letra a, isto é, $v' = a$. mas $v = s'$, logo $a = (s')' = s''$.

Exemplo 62. *Determine a aceleração dum corpo que se desloca segundo a lei* $s = t^3 + 2t$ *no instante* $t = 2$.

Resolução. Por definição, $a(t) = s''(t) = (t^3 + 2t)'' = 6t$, logo $a(2) = 12$.

9.5 Exercícios

1) Dada a função $y(x) = \text{tg}\ x$, determine $y''(x)$;

2) Dada a função $y(x) = (1 + x^2)\text{arctg}\, x$, determine $y''(x)$;

3) Seja $u = \phi(x)$ duas vezes diferenciável. Determine $y''(x)$, se $y = u^2$;

4) Sejam $u = \phi(x)$ e $v = \psi(x)$ funções duas vezes diferenciáveis. Determine $y''(x)$, se $y = \ln \dfrac{u}{v}$;

5) Seja $f(x)$ uma função três vezes diferenciável. Determine $y'''(x)$, se $y(x) = f(x^2)$;

6) Seja $f(x)$ uma função três vezes diferenciável. Determine $y'''(x)$, se $y(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

7) Determine d^2y para $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

8) Sejam u e v funções duas vezes diferenciáveis. Determine d^2y, se $y = uv$.

9.6 Respostas

1) $\dfrac{2 \sin x}{\cos^3 x}$;

2) $\dfrac{2x}{1 + x^2} + 2\text{arctg}\, x$;

3) $2(uu'' + u'^2)$;

4) $\dfrac{uu'' - u'^2}{u^2} - \dfrac{vv'' - v'^2}{v^2}$;

5) $8x^3 f'''(x^2) + 12x f''(x^2)$;

6) $-\dfrac{1}{x^6} f'''(1/x) - \dfrac{6}{x^5} f''(1/x) - \dfrac{6}{x^4} f'(1/x)$;

7) $\dfrac{2 \ln x - 3}{x^3} dx^2$;

8) $ud^2v + 2dudv + vd^2u$.

9.7 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 9.3 e 9.4 desta unidade;

2) No livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, ler as páginas de 214 a 215, 218 a 219 e resolver os exercícios 1, 2, 3, 4, 5 e 6 do parágrafo 6.9;

3) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

4) Resolver os exercícios do parágrafo 9.5 desta unidade;

5) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 667, 669, 675, 679, 685, 689, 705, 712, 714, 722, 740, 741, 744.

9.8 Auto-avaliação

1) Defina derivada de ordem superior;

2) Dê a definição mecânica da derivada de segunda ordem;

3) Determine a derivada de segunda ordem da função $y(x) = \ln f(x)$;

4) Sejam $u = \phi(x)$ e $v = \psi(x)$ funções duas vezes diferenciáveis. Determine $y''(x)$, se $y = u^2v^3$;

5) Seja $f(x)$ uma função três vezes diferenciável. Determine $y'''(x)$, se $y(x) = f(e^x)$;

6) Mostre que a função

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$$

satisfaz a equação

$$y''(x) - (\lambda_1 + \lambda_2)y'(x) + \lambda_1\lambda_2 y(x) = 0,$$

onde C_1 e C_2 são constantes quaisquer, λ_1 e λ_2 são constantes.

9.9 Chave de correcção

1) Veja a definição no parágrafo 9.3 desta unidade;

2) Veja o sentido mecânico no parágrafo 9.4 desta unidade;

3) Determine a derivada de segunda ordem da função $y(x) = \ln f(x)$;

Resolução. Vamos considerar $y(x)$ como uma função composta. Assim,

$$y'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Longrightarrow y''(x) = \frac{f''(x)f(x) - f'^2(x)}{f^2(x)}. \quad \blacksquare$$

4) Sejam $u = \phi(x)$ e $v = \psi(x)$ funções duas vezes diferenciáveis. Determine $y''(x)$, se $y = u^2v^3$;

Resolução. Determinamos, primeiro, $y'(x)$:

$$y' = (u^2v^3)' = 2uu'v^3 + 3u^2v'v^2 = uv(2u'v^2 + 3uvv').$$

Agora vamos diferenciar $y'(x)$, isto é,

$$(y')' = (u'v + uv')(2u'v^2 + 3uvv') + uv(2u''v^2 + 4u'v'v + 3u'v'v + 3uv'^2 + 3uvv'') =$$

$$= 2u'^2v^3 + 2uu''v^3 + 12uu'v^2v' + 6u^2vv'^2 + 3u^2v^2v''. \quad \blacksquare$$

5) Seja $f(x)$ uma função três vezes diferenciável. Determine $y'''(x)$, se $y(x) = f(e^x)$;

Resolução. Vamos determinar a derivada por etapas:

$$y'(x) = f'(e^x)(e^x)' = f'(e^x)e^x;$$

$$y''(x) = [f'(e^x)e^x]' = f''(e^x)e^{2x} + f'(e^x)e^x;$$

$$y'''(x) = [f''(e^x)e^{2x} + f'(e^x)e^x]' =$$

$$= f'''(e^x)e^{3x} + 2f''(e^x)e^{2x} + f''(e^x)e^{2x} + f'(e^x)e^{2x} =$$

$$= f'''(e^x)e^{3x} + 3f''(e^x)e^{2x} + f'(e^x)e^{2x}. \quad \blacksquare$$

6) Mostre que a função

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

satisfaz a equação

$$y''(x) - (\lambda_1 + \lambda_2) y'(x) + \lambda_1 \lambda_2 y(x) = 0,$$

onde C_1 e C_2 são constantes quaisquer, λ_1 e λ_2 são constantes.

Resolução. Precisamos determinar y' e y'' e, seguidamente, colocar na equação. Assim,

$$y'(x) = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x},$$

$$y''(x) = C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}.$$

Em conclusão temos:

$$(C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}) - (\lambda_1 + \lambda_2)(C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x}) + \lambda_1 \lambda_2 (C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}) = 0,$$

portanto, $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ é solução. $\blacksquare$

10 Unidade X. Teoremas sobre funções diferenciáveis e estudo geral de funções

10.1 Introdução

Vamos, nesta unidade, estudar uma série de teoremas que têm grande valor teórico e prático. Veremos como o *sinal da derivada se relaciona com a monotonia duma função* e iremos abordar a questão de *optimização à uma variável*. Com base nos teoremas estudados, iremos dar o *esquema geral de estudo de uma função*.

10.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Enunciar os teoremas sobre funções diferenciáveis;

2) Decompor funções em séries de Taylor;

3) Modelar e resolver problemas simples de optimização;

4) Fazer o estudo completo duma função e esboçar o seu gráfico.

10.3 Teoremas de Rolle, Cauchy e Lagrange

Teorema 19. *(de Rolle[7]) Suponhamos que a função $f(x)$ satisfaz as seguintes condições:*

1) $f(x)$ *é contínua em* $[a, b]$ *;*

2) $f(x)$ *é diferenciável em* (a, b) *;*

3) $f(a) = f(b)$.

Então, existe um $\zeta \in (a, b)$ *tal que* $f'(\zeta) = 0$.

Exemplo 63. *Verifique o cumprimento do teorema de Rolle, para a função*

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Resolução. Vamos verificar o cumprimento das condições do teorema de Rolle em dois intervalos, nomeadamente $[1, 2]$ e $[2, 3]$:

1) $f(x)$ é contínua em $[1, 2]$ e $[2, 3]$;

2) $f(x)$ é diferenciável em $(1, 2)$ e $(2, 3)$;

3) $f(1) = f(2) = 0$ e $f(2) = f(3) = 0$.

Então, existe um $\zeta_1 \in (1, 2)$ e $\zeta_2 \in (2, 3)$ tais que $f'(\zeta_i) = 0$, $i = 1, 2$. Vamos determinar ζ_1 e ζ_2 . Começamos por derivar $f(x)$ e igualar a zero:

$$f'(x) = (x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 3) + (x - 1)(x - 2) = 3x^2 - 12x + 11 = 0.$$

Resolvendo esta equação quadrática obtemos

$$\zeta_1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \zeta_2 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Exemplo 64. *A função* $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ *anula-se nos pontos* $x_1 = -1$ *e* $x_2 = 1$ *, mas* $f'(x) \neq 0$ *no intervalo* $[-1, 1]$ *. Explique a "contradição" aparente do teorema de Rolle.*

[7] Michel Rolle (1652–1719) — matemático francês

Resolução. Vamos verificar qual das condições do teorema de Rolle não se cumpre. Vimos que $f(-1) = f(1) = 0$ e $f(x)$ é contínua no segmento $[-1, 1]$. Vamos verificar se ela é diferenciável em $(-1, 1)$. Calculando a derivada de $f(x)$ temos:

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

No ponto $x = 0 \in (-1, 1)$ constatamos que $f'(0)$ não existe, portanto, $f(x)$ não é diferenciável no intervalo $(-1, 1)$ o que, consequentemente, viola uma das condições do teorema de Rolle, explicando deste modo a "contradição" aparente do teorema.

Teorema 20. *(de Cauchy) Suponhamos que as funções $f(x)$ e $g(x)$ satisfazem as seguintes condições:*

1) $f(x)$ *e* $g(x)$ *são contínuas em* $[a, b]$;

2) $f(x)$ *e* $g(x)$ *são diferenciáveis em* (a, b);

3) $g'(x) \neq 0$ *em* (a, b).

Então, existe um $\zeta \in (a, b)$ tal, que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}.$$

Exemplo 65. *Diga se a fórmula de Cauchy, para as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$, é justa no segmento $[-1, 1]$.*

Resolução. A fórmula de Cauchy não se cumpre, pois $g'(x) = 3x^2$ anula-se no ponto $x = 0 \in (-1, 1)$.

Teorema 21. *(de Lagrange[8]) Suponhamos que a função $f(x)$ satisfaz as seguintes condições:*

1) $f(x)$ *é contínua em* $[a, b]$;

2) $f(x)$ *é diferenciável em* (a, b).

Então, existe um $\zeta \in (a, b)$ tal, que $f(b) - f(a) = f'(\zeta)(b - a)$.

Demonstração. Façamos $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lambda$. Vejamos, no segmento $[a, b]$, a função auxiliar

$$F(x) = f(x) - \lambda x,$$

que é contínua no segmento $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e $F(b) = F(a)$. Para $F(x)$ cumprem-se as condições do teorema de Rolle, consequentemente, existe um $\zeta \in (a, b)$ tal que $F'(\zeta) = 0$, isto é, $f'(\zeta) = \lambda$. ■

10.4 Monotonia versus sinal da derivada. Fórmula de Taylor e regra de L'Hospital

Seja $f : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{E}$.

Definição 28. *Diremos que a função $f(x)$ é* **crescente** *(***decrescente***) no ponto x_0 se existe uma vizinhança de x_0 onde $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$), se $x > x_0$, $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), se $x < x_0$.*

Teorema 22. *Se a função $f(x)$ é diferenciável no ponto x_0 e $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), então $f(x)$ é crescente (decrescente) no ponto x_0.*

Teorema 23. *Suponhamos que $f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). As seguintes afirmações são equivalentes:*

1) $f(x)$ *é crescente (decrescente) em* $[a, b]$;

2) $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) *em* (a, b).

Exemplo 66. *Determine o(s) intervalo(s) de monotonia da função $f(x) = 3x - x^3$.*

Resolução. Vamos, primeiro, derivar $f(x)$:

$$f(x) = 3x - x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3 - 3x^2.$$

Sabemos que se $f'(x) = 3 - 3x^2 > 0$, então a função $f(x)$ é crescente. Resolvendo a desigualdade $3 - 3x^2 > 0$ temos que $x \in (-1, 1)$. Portanto, $f(x) = 3x - x^3$ é crescente no intervalo $(-1, 1)$.

Se $f'(x) = 3 - 3x^2 < 0$, então $f(x) = 3x - x^3$ é decrescente. Resolvendo a desigualdade $3 - 3x^2 < 0$ temos que $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Portanto, $f(x) = 3x - x^3$ é decrescente no intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

---

[8]Joseph Louis de Lagrange (1736–1813) — matemático francês

Exemplo 67. *Quais deverão ser os valores do parâmetro α de modo que a função*

$$f(x) = \frac{(\alpha^2 - 1)x^3}{3} + (\alpha - 1)x^2 + 2x$$

seja sempre crescente?

Resolução. Para que uma função seja crescente é necessário que a sua derivada, de primeira ordem, seja positiva. Assim,

$$f'(x) = (\alpha^2 - 1)x^2 + 2(\alpha - 1)x + 2 > 0.$$

Para que esta expressão, de segundo grau, seja sempre positiva é necessário que o seu discriminante seja negativo e o coeficiente da parte literal de maior grau seja positivo, isto é,

$$\begin{cases} \alpha^2 - 1 > 0, \\ 4(\alpha - 1)^2 - 8(\alpha^2 - 1) < 0. \end{cases}$$

Assim,

$$\alpha^2 - 1 > 0 \Longrightarrow |\alpha| > 1$$

e

$$4(\alpha - 1)^2 - 8(\alpha^2 - 1) < 0 \Longrightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 3 > 0 \Longrightarrow \alpha \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[.$$

Definição 29. *Seja $f(x)$ uma função n-vezes diferenciável no ponto x_0. O polinómio*

$$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

chama-se **polinómio de Taylor**[9] *para a função $f(x)$, com centro no ponto x_0.*

No caso particular, quando $x_0 \equiv 0$, então o polinómio chama-se *polinómio de Maclaurin*[10].

Exemplo 68. *Decomponha o polinómio $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ segundo potências de $x + 1$.*

Resolução. Se a decomposição é feita segundo potências de $x + 1 = x - (-1)$ vemos que $x_0 = -1$. Vamos usar a fórmula

$$P(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(-1)}{k!}(x + 1)^k.$$

Temos que determinar $P^{(k)}(-1)$, $k = 0, 1, 2, 3$ e colocar nesta fórmula. Assim,

$$P(-1) = 1 + 3(-1) + 5(-1)^2 - 2(-1)^3 = 1 - 3 + 5 + 2 = 5;$$

$$P'(x) = 3 + 10x - 6x^2 \Longrightarrow P'(-1) = 3 + 10(-1) - 6(-1)^2 = 3 - 10 - 6 = -13;$$

$$P''(x) = 10 - 12x \Longrightarrow P''(-1) = 10 - 12(-1) = 22; P^{(3)}(x) = -12.$$

Portanto,

$$1 + 3x + 5x^2 - 2x^3 = 5 - \frac{13}{1!}(x + 1) + \frac{22}{2!}(x + 1)^2 - \frac{12}{3!}(x + 1)^3 =$$
$$= 5 - 13(x + 1) + 11(x + 1)^2 - 2(x + 1)^3.$$

Teorema 24. *Seja $f(x)$ uma função definida numa certa vizinhança do ponto x_0 e n-vezes diferenciável neste ponto. Então,*

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o((x - x_0)^n). \tag{2}$$

Esta fórmula chama-se *fórmula de Taylor com resto na forma de Peano*[11].

Teorema 25. *Seja $f(x)$ uma função $(n + 1)$ vezes diferenciável numa certa vizinhança do ponto x_0. Então,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{3}$$

onde $\zeta = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

[9] Brook Taylor (1685–1731) — matemático inglês
[10] Colin Maclaurin (1698–1746) — matemático escocês
[11] Giuseppe Peano (1858–1932) — matemático italiano

A fórmula (3) chama-se *fórmula de Taylor*, para a função $f(x)$, *com resto na forma de Lagrange.*

Exemplo 69. *Decomponha a função $f(x) = \ln(1+x)$ na fórmula de Maclaurin, até x^4, e apresente o resto na forma de Lagrange.*

Resolução. Vamos aplicar a fórmula

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(\theta x)}{5!}x^5, \quad 0 < \theta < 1.$$

Temos:
$f(0) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} \Longrightarrow f'(0) = 1$, $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} \Longrightarrow f''(0) = -1$;
$f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} \Longrightarrow f'''(0) = 2$, $f^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{(1+x)^4} \Longrightarrow f^{(4)}(0) = -6$, $f^{(5)}(x) = \dfrac{24}{(1+x)^5} \Longrightarrow f^{(5)}(\theta x) = \dfrac{24}{(1+\theta x)^5}$.
Logo, virá:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 + \frac{24}{5!(1+\theta x)^5}x^5 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5(1+\theta x)^5}.$$

Teorema 26. *(de L'Hospital[12]) Suponhamos que se cumprem as seguintes condições:*

1) as funções $f(x)$ e $g(x)$ estão definidas e são diferenciáveis numa certa vizinhança do ponto x_0 com excepção, talvez, do próprio ponto x_0;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$;

3) $g'(x) \neq 0$ na vizinhança do ponto x_0 com excepção, talvez, do próprio ponto x_0;

4) existe $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Então,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplo 70. *Usando a regra de L'Hospital calcule*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x}.$$

Resolução. Facilmente se verifica que temos uma indeterminação do tipo $0/0$. Pelo teorema de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha \cos \alpha x \cos^2 \beta x}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Exemplo 71. *Usando a regra de L'Hospital calcule*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}.$$

Resolução. Temos aqui uma indeterminação do tipo $0/0$. Assim,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \div 3x^2 = \frac{0}{0}!!$$

Voltamos a aplicar a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{3x^2\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{6x} = \frac{1}{3}.$$

10.5 Extremos locais. Estudo geral duma função

Seja $f : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{R}$, $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$.

Definição 30. *A recta $x = c$ é* **assímptota vertical** *do gráfico da função $f(x)$ se pelo menos um dos limites $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ é igual à $+\infty$ ou $-\infty$.*

Definição 31. *A recta $y = \alpha$ é* **assímptota horizontal** *do gráfico da função $f(x)$ se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \alpha$.*

Definição 32. *A recta $y = kx + b$ é* **assímptota oblíqua** *da função $f(x)$ se $f(x) - (kx+b) = \alpha(x)$, onde $\alpha(x) \to 0$, quando $x \to +\infty$. Os coeficientes k e b calculam-se do seguinte modo:*

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx].$$

Do mesmo modo se define a assímptota oblíqua, quando $x \to -\infty$.

[12]Guillaume Francois A. de L'Hospital (1661–1704) — matemático francês

Definição 33. *Diremos que a função $f(x)$ atinge no ponto $x_0 \in \mathrm{E}$ o seu* **máximo local** *(***mínimo local***) se existe uma vizinhança $U(x_0)$ de x_0 tal que $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) qualquer que seja $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$.*

Teorema 27. *(de Fermat[13]) Se a função $f(x)$ atinge no ponto x_0 um máximo ou mínimo local, então $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0)$ não existe.*

Demonstração. Seja $f(x)$ uma função definida na vizinhança $U(x_0)$ do ponto x_0 e, sem limitação da sua essência, suponhamos que $f(x)$ atinge no ponto x_0 o seu máximo local. Então,

1) $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ para $x < x_0$;

2) $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ para $x > x_0$.

Pela condição do teorema, se a função $f(x)$ tem derivada no ponto x_0, então $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. Pegando em 1) e calculando o seu limite, para $x \to x_0^-$ temos $f'_-(x_0) \geq 0$; pegando em 2) e calculando o seu limite, para $x \to x_0^+$ temos $f'_+(x_0) \leq 0$. Significa que $f'(x_0) = 0$ ou não existe. ■

Teorema 28. *Suponhamos que no ponto x_0 a função $f(x)$ atinge um máximo (mínimo) local e que nesse ponto $f(x)$ tem derivada de segunda ordem. Então, $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$).*

Exemplo 72. *Determine os extremos locais da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.*

Resolução. Começamos por determinar o(s) ponto(s) estacionário(s) e, para tal, diferenciamos $f(x)$ e igualamos a sua derivada à zero:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow x_1 = 1, \ x_2 = 3.$$

Vamos agora determinar a derivada de segunda ordem e calculá-la para os valores de $x = 1$ e $x = 3$:

$$f''(x) = 6x - 12 \Longrightarrow f''(1) = -6 < 0, \ f''(3) = 6 > 0$$

portanto a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ atinge nos pontos $x = 1$ e $x = 3$ o seu máximo $f(1) = 0$ e o seu mínimo $f(3) = -58$, respectivamente.

Exemplo 73. *Dada a função $f(x) = \dfrac{2(x+2)^2 + 4x}{x}$, determine o valor de x que minimiza f e prove, usando o teste da derivada de segunda ordem, que é mesmo um mínimo.*

Resolução. Derivamos a função $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$ e igualando a zero obtemos $x = -2$ ou $x = 2$. Calculando a segunda derivada nestes pontos temos que $f''(-2) < 0$ e $f''(2) > 0$, logo $x = 2$ minimiza f.

Exemplo 74. *Os gastos diários de navegação são compostos de duas partes: gastos fixos, iguais à L dólares e gastos variáveis, que aumentam proporcionalmente ao cubo da velocidade de navegação. Qual deverá ser a velocidade de navegação de modo que os gastos sejam mínimos?*

Resolução. Suponhamos que o barco já navegou S km em T dias. Então, os gastos totais são dados pela fórmula

$$G = TL + kTv^3,$$

onde k é o coeficiente de proporcionalidade. Sabemos que $T = \dfrac{S}{v}$, daí que

$$G(v) = \frac{S}{v}L + kSv^2.$$

Calculamos a primeira derivada de G e vamos determinar os pontos estacionários:

$$G'(v) = -\frac{SL}{v^2} + 2kSv = 0 \Longrightarrow v = \sqrt[3]{\frac{L}{2k}}.$$

Portanto, para que os custos sejam mínimos a velocidade de navegação deverá ser $v = \sqrt[3]{\dfrac{L}{2k}}$ km/dia.

Exemplo 75. *Determine o maior e menor valor da função $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$, no segmento $[-2, 1]$.*

Resolução. Começamos por determinar os pontos críticos desta função, para tal derivamos e igualamos a derivada a zero: $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1) = 0$. Obtemos os pontos $x_1 = 0 \in [-2, 1]$ e $x_2 = -1 \in [-2, 1]$. Determinamos $f(0) = 1$, $f(-1) = 0$, $f(-2) = 17$ e $f(1) = 8$. Concluindo, $f_{max} = 17$ e $f_{min} = 0$.

[13]P. Fermat (1601–1665) — matemático francês

Definição 34. *Diremos que o gráfico da função $f(x)$ tem no intervalo $(a, b) \subset$ E uma* **concavidade virada para baixo** (**cima**) *se neste intervalo (a, b) este gráfico se encontra abaixo (acima) de qualquer recta tangente.*

Teorema 29. *Se $f(x)$ é duas vezes diferenciável nesse intervalo (a, b), então $f''(x) < 0$ no caso da concavidade estar virada para baixo ou $f''(x) > 0$ no caso da concavidade estar virada para cima.*

O ponto onde a concavidade muda de orientação chama-se *ponto de inflexão.* Se $(x_0, f(x_0))$ é o ponto de inflexão do gráfico da função $f(x)$ e se existe derivada de segunda ordem, então $f''(x_0) = 0$.

Esquema geral de estudo de uma função

1) Determinar o domínio de definição e estudar esta função nos pontos de descontinuidade e de fronteira;

2) Verificar a paridade da função;

3) Verificar periodicidade da função;

4) Determinar as assímptotas verticais e oblíquas;

5) Determinar os zeros da função;

6) Determinar os pontos críticos, isto é, os pontos pertencentes ao domínio da função, onde a sua derivada anula ou não existe;

7) Determinar os intervalos de monotonia e extremos locais da função;

8) Determinar os pontos de inflexão, isto é, os pontos onde a segunda derivada anula ou não existe;

9) Determinar os intervalos onde o gráfico tem concavidade virada para cima ou para baixo;

10) Esboçar o gráfico da função.

10.6 Exercícios

1) Determine o(s) ponto(s) ζ, na fórmula de Lagrange, para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0.5(3 - x^2), & \text{se } \ 0 \le x \le 1, \\ \\ \dfrac{1}{x}, & \text{se } \ 1 < x < +\infty \end{cases}$$

no segmento $[0, 2]$;

2) Na curva $y = x^3$ determine o ponto onde a tangente é paralela à corda que une os pontos $A(-1, 1)$ e $B(2, 8)$;

3) Decomponha a função $f(x) = e^x$ em potências de x e apresente o resto na forma de Lagrange;

4) Avalie o erro absoluto da fórmula $e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}, \quad 0 \le x \le 1$;

5) Decomponha a função $f(x) = \sin x$ em potências de x com resto na forma de Lagrange;

6) Quais deverão ser as dimensões duma lata fechada de forma cilindrica de volume V_0, de modo que a sua superfície total seja mínima?

7) A tabela dada

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f(x)$		0		-2		0		2		0	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

resume o comportamento duma função real de variável real $f(x)$. Diga qual das afirmações é falsa ou verdadeira:

(a) O domínio de $f(x)$ é todo o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$;

(b) A imagem de -1 é -2;

(c) O conjunto de valores de x que anulam $f(x)$ é $\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$;

(d) O ponto com coordenadas $(-1, -2)$ é ponto de mínimo local;

(e) O ponto com coordenadas $(1, 2)$ é ponto de máximo local;

(f) A função $f(x)$ decresce para valores de $x \in]-1, 1[$ e cresce para valores de $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$;

(g) Para valores de $x \in]-\infty, 0[$ a função $f(x)$ tem concavidade virada para cima;

(h) O ponto de inflexão da função $f(x)$ é $(0, 0)$;

8) Baseando-se nos dados da tabela do exercício anterior, esboce o gráfico de $f(x)$.

10.7 Respostas

1) $\zeta = 0.5$ e $\zeta = \sqrt{2}$;

2) $(1, 1)$;

3) $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1$;

4) $|R_{n+1}(x)| = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}$;

5) $\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \sin(\theta x + n\pi) \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

6) As dimensões do cilindro, para que a sua superfície total seja mínima, deverão ser

$$R = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}, \quad h = 2\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}};$$

7) (a) Falsa;

(b) Verdadeira;

(c) Verdadeira;

(d) Verdadeira;

(e) Verdadeira;

(f) Falsa;

(g) Verdadeira;

(h) Verdadeira.

10.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafo 10.3, 10.4 e 10.5 desta unidade;

2) No o livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, ler as páginas de 291 a 328 e resolver os exercícios 1 e 2 do parágrafo 8.1, exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10 do parágrafo 8.2, exercícios 1, 2 e 3 do parágrafo 8.3, exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 do parágrafo 8.4, exercícios 1, 2, 3, 5 e 6 do parágrafo 8.5, exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 do parágrafo 8.6, exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 do parágrafo 8.7;

3) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

4) Resolver os exercícios do parágrafo 10.6 desta unidade.

10.9 Auto-avaliação

1) Enuncie os teoremas de Rolle, Cauchy e Lagrange;

2) Enuncie o teorema sobre monotonia;

3) Enuncie o teorema de Fermat;

4) Avalie o erro da fórmula $\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} + \frac{1}{4!2^4} + \frac{1}{5!2^5}$;

Resolução. Começamos por pegar a função e^x e vamos decompo-la em potências de x, segundo a fórmula de Maclaurin:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{e^{\theta x}}{6!}x^6.$$

Colocando $x = \frac{1}{2}$ temos:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} + \frac{1}{4!2^4} + \frac{1}{5!2^5} + \frac{e^{\theta/2}}{6!2^6} \Longrightarrow$$

$$\left|\sqrt{e} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} + \frac{1}{4!2^4} + \frac{1}{5!2^5}\right)\right| = \left|\frac{e^{\theta/2}}{6!2^6}\right| < \frac{\sqrt{e}}{6!2^6}. \quad \blacksquare$$

5) Decomponha a função $f(x) = e^{2x-x^2}$ em potências de x até x^3 e apresente o resto na forma de Peano;

Resolução. Vamos usar a fórmula de Maclaurin para o caso quando $n = 3$ e o resto na forma de Peano, isto é,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^3).$$

Temos:

$$f(0) = 1; \quad f'(x) = (2 - 2x)e^{2x-x^2} \Longrightarrow f'(0) = 2;$$

$$f''(x) = -2e^{2x-x^2} + (2 - 2x)^2 e^{2x-x^2} \Longrightarrow f''(0) = -2 + 4 = 2;$$

$$f^{(3)}(x) = -2(2 - 2x)e^{2x-x^2} - 2^2(2 - 2x)e^{2x-x^2} + (2 - 2x)^3 e^{2x-x^2} \Longrightarrow f^{(3)}(0) = -4 - 8 + 8 = -4.$$

Portanto,

$$e^{2x-x^2} = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{4}{3!}x^3 + o(x^3) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3). \quad \blacksquare$$

6) Decomponha a função e^{-2x} pelo polinómio de Taylor de potências de x até $n = 3$ e apresente o resto na forma de Lagrange;

Resolução. Sabemos que $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$. Substituindo, nesta igualdade, x por $-2x$ vem $e^{-2x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k x^k}{k!} + R_n(x)$. Logo,

$$e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + R_4(x),$$

onde $R_4(x) = \frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!}x^4 = \frac{16e^{-2\zeta}x^4}{4!} = \frac{2e^{-2\zeta}x^4}{3}$. $\blacksquare$

7) De todos os rectângulos de área S_0 determine aquele cujo perímetro é menor;

Resolução. Denotemos por x e y os lados do rectângulo. Então,

$$S_0 = xy \Longrightarrow y = \frac{S_0}{x}.$$

O perímetro dum rectângulo é

$$P(x) = 2x + 2\frac{S_0}{x}.$$

Temos que determinar os pontos de extremos para a função $P(x)$ e para tal vamos derivá-la e igualar a derivada à zero:

$$P'(x) = 2 - \frac{2S_0}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{S_0}.$$

Calculamos a segunda derivada:

$$P''(x) = \frac{4S_0}{x^3} \Longrightarrow P''(\sqrt{S_0}) = \frac{4}{\sqrt{S_0}} > 0,$$

portanto, a função $P(x)$ atinge o seu mínimo, quando $y = x = \sqrt{S_0}$, isto é, quando é um quadrado. $\blacksquare$

8) Dada uma esfera de raio igual a R, inscreveu-se um cilindro de máximo volume. Determine a altura x e o diâmetro da base y do cilindro;

Resolução. Denotamos por x e y a altura e diâmetro do cilindro. Então, $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$, logo o volume do cilindro é modelado pela fórmula $V(x) = \pi\left(\frac{4R^2 - x^2}{4}\right)x = \pi R^2 x - \frac{\pi x^3}{4}$, onde $x \in [0, 2R]$. Vamos determinar o maior valor da função $V(x)$ no intervalo $[0, 2R]$. Como $V'(x) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi x^2$, então $V'(x) = 0$ se $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ e além disso $V''(x) = -\frac{3}{2}\pi x < 0$. Vemos que $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ é ponto de máximo. Como a função possui somente um ponto crítico, então o cilindro terá o seu maior volume quando a altura é igual a $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Concluindo, a altura é igual a $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$ e o diâmetro é igual a $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$. ■

10.10 Chave de correcção

1) Veja os teoremas no parágrafo 10.3 desta unidade;

2) Veja o teorema no parágrafo 10.4 desta unidade;

3) Veja o teorema no parágrafo 10.5 desta unidade;

4) Avalie o erro da fórmula $\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} + \frac{1}{4!2^4} + \frac{1}{5!2^5}$;

Resolução. Começamos por pegar a função e^x e vamos decompo-la em potências de x, segundo a fórmula de Maclaurin:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{e^{\theta x}}{6!}x^6.$$

Colocando $x = \frac{1}{2}$ temos:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} + \frac{1}{4!2^4} + \frac{1}{5!2^5} + \frac{e^{\theta/2}}{6!2^6} \Longrightarrow$$

$$\left|\sqrt{e} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} + \frac{1}{4!2^4} + \frac{1}{5!2^5}\right)\right| = \left|\frac{e^{\theta/2}}{6!2^6}\right| < \frac{\sqrt{e}}{6!2^6}. \quad ■$$

5) Decomponha a função $f(x) = e^{2x-x^2}$ em potências de x até x^3 e apresente o resto na forma de Peano;

Resolução. Vamos usar a fórmula de Maclaurin para o caso quando $n = 3$ e o resto na forma de Peano, isto é,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^3).$$

Temos:

$$f(0) = 1; \quad f'(x) = (2 - 2x)e^{2x-x^2} \Longrightarrow f'(0) = 2;$$

$$f''(x) = -2e^{2x-x^2} + (2 - 2x)^2 e^{2x-x^2} \Longrightarrow f''(0) = -2 + 4 = 2;$$

$$f^{(3)}(x) = -2(2 - 2x)e^{2x-x^2} - 2^2(2 - 2x)e^{2x-x^2} + (2 - 2x)^3 e^{2x-x^2} \Longrightarrow f^{(3)}(0) = -4 - 8 + 8 = -4.$$

Portanto,

$$e^{2x-x^2} = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{4}{3!}x^3 + o(x^3) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3). \quad ■$$

6) Decomponha a função e^{-2x} pelo polinómio de Taylor de potências de x até $n = 3$ e apresente o resto na forma de Lagrange;

Resolução. Sabemos que $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$. Substituindo, nesta igualdade, x por $-2x$ vem $e^{-2x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k x^k}{k!} + R_n(x)$. Logo,

$$e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + R_4(x),$$

onde $R_4(x) = \frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!}x^4 = \frac{16e^{-2\zeta}x^4}{4!} = \frac{2e^{-2\zeta}x^4}{3}$. ■

7) De todos os rectângulos de área S_0 determine aquele cujo perímetro é menor;

Resolução. Denotemos por x e y os lados do rectângulo. Então,

$$S_0 = xy \Longrightarrow y = \frac{S_0}{x}.$$

O perímetro dum rectângulo é

$$P(x) = 2x + 2\frac{S_0}{x}.$$

Temos que determinar os pontos de extremos para a função $P(x)$ e para tal vamos derivá-la e igualar a derivada à zero:

$$P'(x) = 2 - \frac{2S_0}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{S_0}.$$

Calculamos a segunda derivada:

$$P''(x) = \frac{4S_0}{x^3} \Longrightarrow P''(\sqrt{S_0}) = \frac{4}{\sqrt{S_0}} > 0,$$

portanto, a função $P(x)$ atinge o seu mínimo, quando $y = x = \sqrt{S_0}$, isto é, quando é um quadrado. ■

8) Dada uma esfera de raio igual a R, inscreveu-se um cilindro de máximo volume. Determine a altura x e o diâmetro da base y do cilindro;

Resolução. Denotamos por x e y a altura e diâmetro do cilindro. Então, $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$, logo o volume do cilindro é modelado pela fórmula $V(x) = \pi\left(\frac{4R^2 - x^2}{4}\right)x = \pi R^2 x - \frac{\pi x^3}{4}$, onde $x \in [0, 2R]$. Vamos determinar o maior valor da função $V(x)$ no intervalo $[0, 2R]$. Como $V'(x) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi x^2$, então $V'(x) = 0$ se $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ e além disso $V''(x) = -\frac{3}{2}\pi x < 0$. Vemos que $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ é ponto de máximo. Como a função possui somente um ponto crítico, então o cilindro terá o seu maior volume quando a altura é igual a $x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Concluindo, a altura é igual a $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$ e o diâmetro é igual a $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$. ■

Ensinar é lembrar aos outros que eles sabem tanto quanto você...

Typeset by LaTeX